QUELQUES ASPECTS RELATIONNELS DU LANGAGE DES MATHEMATIQUES

Dr. Alice Toma
Université de Genève
toma1@etu.unige.ch

Abstract: The clarity of mathematical text is provided, among others, by the way in which its architecture is built through the logical-semantic relations. Their study may clarify by describing and listening a general text and especially a mathematical scientific text. Studying logical and semantic relations often means analyzing their specific or aleatory marks. This is what the article intends using the examplification relation of *generalization* and two of its most frequent French marks in mathematical language *plus généralement* and *en général*. The fine research of these marks of generalization proves their specialization for expressing different types of generalization, in syntactico-semantic contexts, also different. *Enunciative generalization*, distinct from *absolute* and *relative generalization* also entails two types: *intensional generalization* (*plus généralement*) and *extensional generalization* (*en général*).

Keywords: textual analysis, discursive analysis, logical-semantic relations., linking mark, enunciative generalization, absolute generalization, relative generalization, intensional generalization, extensional generalization.

Un des sujets préférés par l'analyse du discours est - comme nous l'avons vu dans l'introduction - l'étude des ***relations sémantiques*** - en tant que moyen de la cohésion textuelle. Celles-ci vivent principalement par leurs marques, ***les connecteurs***. La bibliographie de spécialité enregistre parfois des 'monographies' sur certains connecteurs. Notre analyse ne va pas dans cette direction. Suivant le modèle des recherches d'Emilio Manzotti, nous essayons de caractériser, dans ce chapitre, un premier type de relation logico-sémantique, la ***généralisation***. La différence entre notre analyse et les monographies sur les connecteurs est principalement méthodologique. Pour nous, le point de départ est 'l'idée de généralisation' tandis que le point d'arrivée est une définition précise de la généralisation et un inventaire de marques spécifiques et non spécifiques (accidentales) de cette relation logico-sémantique, marques sont employées dans le langage des mathématiques. Les études de type monographie partent du connecteur et aboutissent à une description des possibilités relationnelles que celui-ci peut développer. Pour nous le mouvement est inverse, car l'accent tombe sur la découvert de l'architecture du texte, non pas sur les réseaux d'un mot-connecteur: "Tra le proposizioni di un testo sussistono in genere delle relazioni (relazioni semantiche) il cui riconoscimento è essenziale nella ricostruzione della archittetura del testo (sia a livelo macrostrutturale che microstrutturale)" (Manzotti 1994: 82).

Notre but est de définir ***la généralisation*** en tant que relation logico-sémantique d'une manière aussi précise que possible et de saisir son spécifique dans le texte scientifique. Pour ce faire nous regardons en même temps, les marques de cette relation, mais aussi les parties gauche et droite, le **Gé** (généralisé), respectivement, le **Gent** (généralisant). Nous allons nous occuper principalement de deux connecteurs, *en général* et *plus généralement* et du processus d'induction qu'ils donnent lieu. Nous allons essayer de définir le plus précisément possible la sémantique et le fonctionnement textuel de ces marques.

1. Le terme de **généralisation (généraliser)**. *Les trois acceptions de la généralisation*

Comme nous l'avons déjà annoncé, nous voulons caractériser la ***généralisation*** en tant que relation logico-sémantique. Dans un premier temps, nous présenterons les acquis sur ce sujet, à savoir, d'une part, les connaissances lexicographiques et, de l'autre part, quelques résultats de l'analyse linguistique logico-sémantique. Dans un deuxième temps, nous passerons à montrer notre propre contribution sur ce sujet.

Les dictionnaires enregistrent les informations concernant la généralisation sous deux entrées principales: le substantif *généralisation* et le verbe *généraliser* auxquelles nous allons ajouter plus loin *général* et *généralement*. La définition lexicographique de la généralisation comprend des sens généraux et spécialisés:

> GÉNÉRALISATION, subst. fém.
>
> Action de généraliser; résultat de cette action.
>
> A. Extension à la plupart des cas ou des individus des caractères attribués particulièrement à une chose.
>
> 1. Une baisse du prix de transport du charbon pourrait découler d'une généralisation de l'emploi de pipe-lines charriant

une boue de charbon et d'eau actuellement à l'étude aux États-Unis.

B. [Avec idée de compréhension] Opération mentale qui consiste à former des idées générales en intégrant sous le même concept les caractères communs à plusieurs objets singuliers.

C. Spécialement 1. MATH. Généralisation d'une proposition. "Opération qui consiste à trouver une seconde proposition contenant la première comme cas particulier." (Nouv. Lar. III.).

Telle quelle apparaît dans les dictionnaires, la généralisation est réduite au résultat de la généralisation; mais à côté du résultat de la généralisation il faut ajouter le processus de généralisation. Par exemple:

(1) *La généralisation est souvent utilisée dans la recherche scientifique.*

Au niveau de la langue commune il y a au moins deux acceptions de la généralisation qui apparaissent: le passage d'une propriété, d'un objet à plusieurs objets, et le passage de plusieurs propriétés à une seule qui les comprenne. Au niveau du langage spécialisé la définition de la généralisation acquiert une précision technique et une certaine variation d'un domaine à l'autre (cf. mathématique et logique). Mais de ce dernier aspect de la généralisation nous ne nous occupons pas dans notre actuel travail.

Le verbe *généraliser* reprend les sens du nom *généralisation* sous sa propre catégorie morphologique:

GÉNÉRALISER, verbe trans.

A. Au plan concr. Rendre général par extension à la plupart des cas ou des individus.

On doit examiner les cas à partir desquels on veut généraliser et se demander: quel droit a-t-on de généraliser ? C'est-à-dire quelle raison a-t-on de présumer que le caractère constaté dans ces cas se rencontrera dans des milliers d'autres ? LANGLOIS, SEIGNOBOS, Introd. ét. hist., 1898, p. 240.

B. Au plan abstr. Raisonner en procédant par induction du particulier au général pour intégrer dans un ensemble d'idées les cas similaires. Généraliser une notion, une idée, une théorie, une observation.

Spécialement MATH. Généraliser une hypothèse, une formule d'algèbre, une équation; équation généralisée; géométrie généralisée; abrégé, application, auto symétrie, fonction, hélicoïdal, projection, répétition généralisé(e) (Math. 1967-69).

Les études de sémantique textuelle (cf. Manzotti 2005-2006, cours) font le départ entre une ***acception absolue*** et une ***acception relative*** de la généralisation.

Dans l'acception absolue la généralisation prend la forme des énoncés universels ou ***propositions universelles*** du type:

(Tous) Les hommes sont mortels.
Dans un triangle, la somme des angles est 180°.
Cela est toujours vrai.
Les allemands boivent de la bière.

Les énoncés universaux comprennent souvent une quantification universelle (forte ou faible). La quantification universelle agit sur le sujet, le temps ou sur les autres circonstances d'une proposition. Les marques linguistiques de ces généralisations sont: le pluriel, le mode et le temps verbaux, les quantificateurs (*tout, rien, chacun* etc.).

Ces propositions sont des généralisations en soi, par leur propre forme et sémantique et non par rapport à d'autres propositions, même si elles évoquent implicitement des cas particuliers qu'elles généralisent.

Dans l'acception relative, la généralisation est une ***opération discursive*** qui consiste dans le passage du **p** (Gé), moins général, à **q** (Gént), plus général. Ce passage est signalé ou pas par un connecteur. Parmi les connecteurs de la généralisation nous rappelons ici: *en général*, *plus généralement*, *en règle générale*, etc. **P** et **g** sont des segments du texte: des mots, des syntagmes, des phrases, voire des pages entières.

Un exemple de généralisation sans connecteur repris du cours ci-dessus mentionnée est:

Je lui ai donné un livre.
Je lui ai fait un cadeau. où *cadeau* généralise *livre*.

On parle d'une acception relative, dans le sens que **q** hors contexte n'est pas nécessairement général; il n'est pas toujours une proposition universelle.

À ces deux acceptions, on peut ajouter une troisième, apparentée à la deuxième, la généralisation en tant que ***modalité énonciative***. Elle caractérise (explicitement *généralement parlant*) la façon dont le locuteur présente l'état de choses, "sans entrer dans les détails", d'une manière générale. Il s'agit donc d'une forme d'atténuation de la force de l'énoncé. Celui-ci a un certain degré d'approximation. Cette généralisation est toujours signalée par un adverbe ou une locution adverbiale.

Dans ce qui suit nous nous occuperons de ces deux derniers types de généralisation.

2. *La généralisation (relative) en mathématiques*

La généralisation relative que nous allons appeler tout court, à partir de ce moment, généralisation peut être signalée par un nombre très grand de marques parmi lesquelles nous rappelons ici: *en général, en règle générale, d'une manière générale, généralement, plus généralement; ordinairement, pour l'ordinaire, à l'ordinaire, de l'ordinaire; normalement, naturellement; communément; en principe, de principe, par principe, pour le principe; en somme, somme toute; comme* (comparaison généralisante).

En parcourant le corpus nous découvrons un petit nombre de généralisations marquées – 30. Cette constatation nous indique que le discours des mathématiques est, en général abstrait, et s'il y a des passages moins abstraits, ceux-ci sont suivis des généralisations.

Le nombre des généralisations dans un certain texte donne des indications sur le type de raisonnement dominant. S'il y a peu de généralisations, alors le discours est plutôt déductif. Si, par contre, dans un texte il y a moins de généralisations, alors ce texte-là est plutôt inductif. En plus, le manque de généralisations s'associe avec le nombre grand de particularisations. Apparemment, le texte mathématique a, en moyenne, un certain degré d'abstraction, relativement constant, degré qui est corrigé ou maintenu à l'aide de la particularisation et de la généralisation. Par exemple, dans Bourbaki 1970, où le mouvement du raisonnement est déductif – c'est généralement reconnu par les spécialistes –, nous trouvons seulement 4 généralisations, mais 17 particularisations. Dans les auteurs modernes il y a un certain équilibre entre la particularisation et la généralisation; par exemple, 9 et, respectivement 5 chez Harpe 2004 et 8 particularisations et 5 généralisations chez Ronga 2004.

Mais, hors les généralisations marquées, il y a les généralisations non marquées que nous mentionnons ici en passant, sans nous attarder sur ce sujet, car il ne fait pas l'objet de notre analyse parce que ce genre de généralisation apparaît exclusivement dans le langage artificiel. Notre remarque est importante car les observations ci-dessus concernant les mathématiques ne doivent pas être généralisées sans limite, mais sous certaines réserves.

Les marques de la généralisation le plus fréquemment rencontrées dans notre corpus sont: *en général* (12 fois), *plus généralement* (13), *en* *principe* (2), *généralement* (1), *principalement* (1), *en règle générale* (1). Nous constatons rapidement que les marques principalement utilisées, les marques les plus fréquentes sont: *en général* et *plus généralement*. La fréquence est une des raisons pour lesquelles nous retenons pour une analyse détaillée ces deux marques. Une autre raison est le fait que leur fonctionnement est différent.

L'hypothèse de départ que nous faisons est qu'*en général* et *plus généralement* fonctionnent différemment. Plus précisément, le premier est extensionnel et opère sur les occurrences du prédicat, tandis que le second, *plus généralement* est intensionnel et opère sur toute l'énonciation. Nous ajoutons encore une remarque: le verbe associé avec *en général* est le plus souvent *être* (8 fois sur 2 occurrences); en plus, la forme de ce verbe est chaque fois négative.

***1.3. Une description intuitive de* en général *et de* plus généralement**

Soit les exemples (19) et (20) pour *en général*.

Le contenu de *en général* dans (20) est: Le Gé "la décomposition" est multipliée dans un ensemble de "décompositions" qui ont deux propriétés opposées, une explicite, l'autre implicitée par la négation du Gént "n'est pas unique". *En général* montre qu'il existe au moins une exception. Les décompositions ne sont pas uniques, mais il y en a au moins une qui soit unique. Une possible paraphrase est:

(20') la décomposition est <u>*parfois*</u> unique

ou encore

(20'') la décomposition n'est pas <u>*toujours*</u> unique

Soit les exemples (7) et (30) pour *plus généralement*.

Le contenu de *plus généralement* dans (7) est le suivant: le Gé "C^n est muni d'une structure d'espace vectoriel sur C" est similaire, sur un niveau plus abstrait avec le Gént "K^n d'une structure d'espace vectoriel sur K". *Plus généralement* nous indique que le concept mathématique K^n, plus abstrait, plus large que C^n garde la propriété d' "espace vectoriel". *Plus généralement* assure le transfère d'une propriété d'un objet à l'autre. Une possible paraphrase est la suivante:

(7') C^n est muni d'une structure d'espace vectoriel sur C <u>tout aussi comme son incluant</u> K^n qui est muni d'une structure d'espace vectoriel sur K

1.4. A généralisation intensionnelle vs la généralisation extensionnelle

L'analyse ci-dessus nous amène à faire la distinction entre la ***généralisation intentionnelle*** et la ***généralisation extensionnelle***. La généralisation intensionnelle est annoncée par *en général*, la généralisation extensionnelle est annoncée par *plus généralement*.

*S*émantiquement, *en général* fonctionne comme un quantificateur universel faible. Il multiplie du point de vue numérique le Gé à une classe quasi totale, le Gént. Cette classe admet toujours au moins une exception. Il nous fait appliquer la prédication pour une classe d'entités ou des circonstances de laquelle on enlève les exceptions. Autrement dit, il fait que la validité de la proposition **p** soit réduite; la prédication n'est pas générale; l'ensemble auquel elle s'applique admet des exceptions. En somme, sa fonction sémantique est d'adverbe de phrase (pas d'énonciation) quantifiant. Il n'est pas compatible avec la généralisation absolue; il ne se combine pas avec un quantificateur universel.

Par contre, *plus généralement* est un modifieur de l'énonciation; il est ***généralisant*** et pas ***quantifiant***; il présente le Gént comme une entité plus abstraite par rapport au Gé, toujours explicit; il envisage l'entité à laquelle il s'applique comme énoncée d'une manière qui enlève les détails par rapport à ce qui aurait pu être dit. Autrement dit, il existe une base de départ pour généraliser après. Le Gént est d'un niveau général seulement par rapport au Gé. *Plus généralement* est compatible avec la généralisation absolue. Dans notre corpus, *tout* apparaît une fois sur l'exemple (16). Gé et Gént sont des énoncés universels. Nous pourrions dire que *plus généralement* et plus général qu'*en général*.

Du point de vue syntaxique, *en général* opère sur la prédication (comme nous l'avons vu dans "la décomposition en général n'est pas unique") ou il est un (post)modifieur de SN (cf. les chiens en général aboivent) tandis que *plus généralement* est un adverbe de phrase ou, moins souvent, modifieur de SN.

1.5. L'induction et la généralisation

La généralisation est, en même temps, un processus et un résultat. En tant que résultat nous l'avons étudiée plus haut. En tant que résultat, mais aussi en tant que processus, la généralisation s'oppose à la particularisation. Tandis que la généralisation est inductive, la particularisation est déductive. Mais qu'est-ce que c'est l'induction? Et la déduction?

Selon le dictionnaire, l'induction a des acceptions générales et des acceptions spécialisées, comme il suit:

INDUCTION, P. ext. Fait de remonter, par le raisonnement ou l'intuition, de certains indices à des faits qu'ils rendent vraisemblables, en une synthèse de pensée reconstructive allant de la cause à la conséquence ou inversement.

a) LOG. Type de raisonnement consistant à remonter, par une suite d'opérations cognitives, de données particulières (faits, expériences, énoncés) à des propositions plus générales, de cas particuliers à la loi qui les régit, des effets à la cause, des conséquences au principe, de l'expérience à la théorie.

b) MATH. Induction mathématique. "Opération consistant, une fois établi qu'il est légitime d'étendre une relation d'un terme au terme suivant de la même série, à généraliser en l'étendant de proche en proche à tous les termes de la série." (FOULQ.-ST-JEAN 1962).

Nous retenons la propriété de *remonter* d'un objet à l'autre ou d'*étendre* une propriété d'un objet à l'autre.

Pour la déduction les définitions lexicographiques enregistrent aussi des sens communs et des sens spécialisés comme il suit:

DÉDUCTION, Raisonnement par lequel on fait sortir d'une vérité ou d'une supposition admise comme vérité la conséquence logique qu'elle contient implicitement.

a) MATH. Déduction (mathématique). "Démonstration mathématique traditionnelle qui conduit des principes aux conséquences (...) par opposition au raisonnement expérimental qui reconduit aux lois à partir des faits" (LEGRAND 1972).

b) LOG. "Type de raisonnement qui conduit de une ou plusieurs propositions dites prémisses, à une conclusion "nécessaire", c'est-à-dire inévitable si l'on accepte la règle du jeu." (LEGRAND 1972). Déduction logique, syllogistique.

La propriété de la déduction qui traverse toute les domaines de son utilisation est de *faire sortir*, de *conduire* du général au particulier.

Nous remarquons que dans les deux cas, l'induction et la déduction, il s'agit d'un *mouvement*. En outre, les points de départ et d'arrivée sont les même, à savoir, le *particulier* et le *général*. Ce qui fait la différence est leur positionnement différente: pour l'induction, le particulier occupe le point de départ et le général – le point d'arrivée; pour la déduction – l'inverse.

Si nous acceptons les prémisses ci-dessus, l'induction est le procédé sous-jacent à la généralisation. Elle est le procédé logique qui assure le passage des observations et des expériences particulières aux principes généraux. Elle est un type de raisonnement qui passe du particulier au général. Elle s'oppose à la déduction qui est le procédé qui assure le passage d'une conclusion (certe) à une de ses prémisses grâce à la logique. Elle est basée sur un raisonnement qui permet l'extraction d'une observation d'une donnée à partir d'un ensemble d'informations; par exemple, la démonstration d'un thème.

Si nous regardons de près l'induction, nous distinguons l'induction complète et l'induction incomplète. L'induction complète ou spécialisée a deux sous-types: l'induction logique et l'induction mathématique.

L'induction formelle ou l'induction aristotélienne ou encore le syllogisme inductif consiste dans le fait d'attribuer une série d'observations à tous les éléments *xi* d'un ensemble *I* fini, de *n* éléments:

x1 a la propriété P
x2 a la propriété P
xn a la propriété P

Autrement dit l'ensemble *I* des *xi* a la propriété *P*.

Par exemple:

$\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ est un espace vectoriel sur **R**

$\mathbf{C}^{\mathbf{n}}$ est un espace vectoriel sur **C**

$\mathbf{K}^{\mathbf{n}}$ est un espace vectoriel sur **K**

Du point de vue logique, l'induction formelle est le passage d'un ensemble de formules à une formule quantifiée universellement.

L'induction mathématique est une méthode de démonstration par récurrence. Elle respecte le principe suivant: Si une propriété est vérifiée pour *1* et si l'on peut démontrer que si la même propriété est vérifiée pour *n* alors elle est aussi pour *n+1*, alors cette propriété est vérifiée par tous les nombres, quel que soit *n*.

L'induction incomplète ou l'induction empirique est basée sur l'expérience (directe). Elle vise la formulation d'une loi généralement valide sur la base d'une succession finie d'observations. Cette généralisation est valable pour un nombre petit de cas. Par exemple:

Ses amis boivent seulement du cola -->
Les jeunes boivent seulement du cola.

Si quelqu'un fait l'affirmation ci-dessus, c'est sur la base d'un comportement observé régulièrement chez une certaine catégorie sociale, mais l'extension sur l'ensemble de cette catégorie va un peu trop vite/ loin.

Dans une analyse plus fine, un sous-type d'induction incomplète est l'induction que nous appelons généralisation gratuite. Elle a une base empirique insuffisante (un ou quelques cas). Elle n'est pas basée sur un raisonnement régulier d'un cas à l'autre. De ce fait nous pourrions dire qu'elle est une généralisation hypothétique. Bien qu'elle ait beaucoup de limites, cette généralisation est pourtant fondamentale en tant que méthode euristique, dans toutes les sciences.

1.6. En guise de conclusion

Les textes scientifiques ne varient pas beaucoup les marques pour le même type de relation. *En général* et *plus généralement* sont des marques de généralisation différentes, la généralisation extensionnelle, respectivement, la généralisation intensionnelle. *Plus généralement* introduit l'aboutissement d'un raisonnement inductif, tandis que *en général* le relativise.

SOURCES

BORTOLOTTI, R.; BERNACHOT, C., 1991, *Mathématique 9* $^{\text{ème}}$, Département de l'instruction public, Genève.

BOURBAKI, Nicolas, 1970, *Eléments de mathématique. Algèbre*, Hermann, Paris.

BOURBAKI, Nicolas, 1985, *Eléments d'histoire des mathématiques*, Masson, Paris.

BORTOLOTTI, R.; BERNACHOT, C., 1991, *Mathématique 9*$^{\text{ème}}$, Département de l'instruction public, Genève.

BELL, E.T., 1939, *Les grands mathématiciens*, Payot, Paris.
RONGA, F., 2004, *Analyse linéaire*, Toulouse, Cepadues-Éditions.

BIBLIOGRAPHIE

MANZOTTI, Emilio, 2002, „Due tipi di movimenti compositivi: la particolarizzazione e la generalizzazione”, in ID, *Scrivere su „argomenti di ordine generale”,* „Nuova Secondaria”, 19, n. 8, pp. 33-58.
KLEIBER, Georges, 1885, „Du cote de la genericite verbale: les approches quantificationnelles”, in Langage (Generique et genericite), 79/ septembre 85, pp 61-88.
MANZOTTI, Emilio et al., 1992, *Lezioni sul testo: modelli di analisi letteraria per la scuola*, Brescia, Ed. La Scuola.
GENTILHOMME, Yves, 2000, „Termes et textes mathématiques. Réflexions linguistiques non standard”, in *Cahier de lexicologie*, 76, p. 57-89.
BIDU-VRĂNCEANU, Angela (coord.), 2000, *Lexic comun, lexic specializat*, Bucureşti, Editura Universității Bucureşti.
TOMA, Alice, 2006, 2008, *Lingvistică şi matematică,* EUB, Bucureşti.