KURT GÖDEL AND THE INCOMPLETENESS OF MODAL AXIOMATIC SYSTEMS

Mircea Oancea
Prof. PhD., "Politehnica" University of Bucharest

Abstract: A fundamental contribution in the history of mathematical logic was the Kurt Gödel's theorem: if we have a predicative formalization of the simple domain of mathematics, arithmetic and build with these logical formulas an axiomatic system then is stranded every trial of building a completeness system, what it demonstrates as theorems all formulas what is valid in the arithmetical domain.
The incompleteness what is the Gödel's discovery in the mathematical fields, is appeared, and, in the logical fields. We have discovered that the incompleteness is in the levels of modal logic.

Keywords: modal logic, incompleteness, level, validity, axiomatic style.

O contribuție fundamentală în istoria logicii matematicii din secolul trecut o reprezintă teorema lui Kurt Gödel[1]. Teorema lui spune:
Dacă formalizăm propozițiile celui mai simplu domeniu al matematicii, aritmetica și construim cu aceste formule logice(formulele logice sunt actorii din sistemul formal[2]) atunci eșuează orice încercare de a construi un sistem axiomatic-informațional complet, care să demonstreze ca teoreme, toate formulele ale căror propoziții sunt adevărate în domeniul aritmeticii. Conform teoremei fundamentale a raportului dintre sistemele formale și cele formal-informaționale, sistemele formal-informaționale pe care regizorii le construiesc, nu au nici o influență asupra sistemului formal de la care pornește construcția. Deci aceste propoziții ale aritmeticii, domeniul întreg este imun față de sistemul formal-informațional. Deci consecința teoremei lui Gödel asupra propozițiilor din aritmetică este nulă, adică acestea își continuă destinul ca și cum această teoremă nu ar exista, pentru că nu le privește pe ele, ci privește doar actorii pe care regizorul i-a creat luând de la aceste formule doar o copie(o instanță) și nu formula. Deci aritmetica ca și întreaga matematică și-a continuat apoi existența ca și cum această teoremă nu ar fi fost formulată, pentru că nu referă la ele. Dar atunci de ce a creat Gödel această teoremă? El a creat-o pentru a invalida un tip de axiomatizare, deci un tip de sisteme formal-informaționale create pornind de la matematică. Este vorba de celebrul proiect a lui David Hilbert, unul din marii matematicieni ai secolului XX, care și-a propus să axiomatizeze întreaga matematică, deci să creeze un sistem formal-informațional axiomatic peste întreaga matematică. Iar Gödel a creat teorema sa ca să invalideze acest proiect și sub nici o formă ca să arunce asupra aritmeticii sau matematicii în general, o umbră negativă, precum că ar avea o vulnerabilitate, o infirmitate etc. Sub nici o formă. Deci el a creat această teoremă special pentru invalidarea proiectului hegemonico-axiomatic asupra matematicii, inițiat de Hilbert. Și desigur, teorema a avut rezultatul scontat: proiectul hegemonic a fost abandonat.
Pentru că aritmetica este un sub-domeniu acceptat de celelalte domenii ale matematicii(care cresc, ca și domeniile logicii, spre infinit, adică niciodată în istoria logicii și matematicii, ca științe metafizice, care conceptualizează și teoretizează infinitățile, nu se va putea spune că s-a construit ultimul domeniu), deci toate domeniile matematicii, reconstruite axiomatic sunt incomplete.

[1] Klaus G., Logica modernă, Ed. Științifică, B., 1976, p-318.
[2] Oancea M., Axiomatizări gödeliene în domeniul K, Ed. Printech, B., 2018, p-87.

În articolul *Rezolvarea problemei Kantiene a judecăților sintetic-apriori*[3] am decis că formalizând orice teorie matematică obținem un sistem formal care se plasează în sub-nivelul Kantian(care funcționează ca și nivelul general valid) și în nivelul general valid, pentru că numai matematica și logica au functori între care funcționează relații de valuare și relații generice de definiție inter-functoriale. Numai logica și matematica conceptualizează și teoretizează mulțimi infinite de sub-mulțimi infinite calitative și respectiv, cantitative. Toate celelalte științe sunt locale, adică studiază mulțimi finite de obiecte. Și deci formalizate logic, obținem sisteme care se plasează la nivelul semi-general valid, adică o formulă este adevărată în unele sisteme dar poate fi falsă în alte sisteme. Și aceasta este esența unei teorii științifice locale: conține propoziții care sunt garantate de creator ca fiind valide local, în acea teorie. Dar propoziția respectivă poate fi falsă în altă teorie. Celebră este axioma luminii a lui Newton: Lumina se propagă instantaneu, adică are viteza infinită. Această axiomă a fost validă în teoria lui Newton, iar în teoria lui Einstein ea a devenit nevalidă. Numai matematica și logica conceptualizează și teoretizează mulțimi infinite care prin reprezentările finite construite oferă teoreme(formule în matematică) care sunt etern valide.

Deci teoriile matematice formalizate, ca sisteme logice, se plasează în sub-nivelul kantian și în nivelul general-valid și în mod necesar, aceste sisteme formalizate vor avea propoziții gödeliene, deci propoziții care nu pot fi demonstrate în sisteme axiomatice, deși ele sunt valide în domeniu.

Completitudinea este una din meta-proprietățile[4] unui sistem formal-informațional, alături de consistență, de validitate și de independența axiomelor. O proprietate devine meta-proprietate atunci când un sistem afirmă că o are și oferă și metoda de validare. Numai sistemele formal-informaționale ale logicii au această putere, deci numai ele au meta-proprietăți.

Meta-proprietatea fundamentală constructivă este consistența:

O mulțime S de propoziții P1, P2,…, Pn devine sistem dacă și numai dacă:

1. Nu există(nu sunt acceptate) două propoziții Pi și Pj, astfel încât între cele două să existe relația
   -Pi=Pj,
   adică una să fie negația celeilalte.
2. Dacă există propoziția Pi, atunci nu se poate demonstra din axiomele acceptate teorema Ti astfel încât
   -Ti=Pi
3. Dacă din axiomele acceptate se poate demonstra Ti, din aceleași axiome nu poate fi demonstrată teorema Tj astfel încât
   -Ti=Tj

Dacă se poate accepta sau demonstra, adică dacă se ajunge la o contradicție, indiferent pe ce cale, atunci mulțimea respectivă nu urcă la poziția de sistem, ci rămâne o mulțime amorfă. Această meta-proprietate este fundamentală și pentru lumea ontologică a sistemelor în asociere cu emergența: Un sistem ontologic este generat numai și numai dacă mulțimea elementelor componente este emergent-consistentă.[5]

Existând o meta-proprietate constructivă de sisteme formal-informaționale, consistența, în mod necesar va exista și o meta-proprietate distructivă de sisteme formal-informaționale, non-validitatea: Un sistem formal este valid dacă și numai dacă orice teoremă care poate fi demonstrată în sistem, pornind de la axiome și utilizând reguli axiomatice este și validă în domeniul(în sistemul formal în care a fost creat sistemul axiomatic ca sistem formal-informațional) în care a fost creat sistemul. Dacă poate fi demonstrată o teoremă în sistem și ea nu este validă în domeniul de constituire atunci ”sistemul” este eliminat(ca fiind ne-valid), adică acordarea poziției[6] de sistem de către meta-

[3] Oancea M, Rezolvarea problemei kantiene a judecăților sintetic-apriori, în Raționalitate și spiritualitate, Ed. Printech, B., 2016, p-102.

[4] G.E. Hughes, M. J. Cresswell, A new introduction to modal logic, Routledge, London, 1996, p-72.

[5] Oancea M., Sistemele lumii cu viață și sistemele logice, în Metafizică, logică și spiritualitate, Ed. Printech, B., 2018, p-99.

[6] Oancea M, Sisteme ontologice, în Raționalitate și spiritualitate, Ed. Printech, B., 2016, p-71.

proprietatea de validitate a fost eronată. Numai sistemele formal-informaționale logice au această putere: auto-distrugerea atunci când nu respectă valorile presupuse.

Desigur, și în lumea ontologică există un principiu distructiv, corelat al meta-proprietății de non-validitate, principiul doi al termodinamicii[7]:

Un sistem urcă cu atât mai mult(sau coboară cu atât mai mult) în ierarhia ontologică cu cât consumă mai puțină masă și energie(respectiv consumă mai multă masă și energie). Deci în lumea ontologică cei care aplică principiul doi al termodinamicii sunt celelalte sisteme grupate în alianța tuturor împotriva unui sistem(ATIUS) dat pentru a-l obliga să respecte principiul doi al termodinamicii, adică să consume cât mai puțină masă și energie și deci să le rămână lor mai multă masă și energie din sistemul termodinamic relativ închis.

Cele două meta-proprietăți fundamentale, ale sistemelor logice formal-informaționale, consistență și validitatea acționează corelat, primul construiește sisteme formal-informaționale, secundul distruge unele dintre aceste sisteme formal-informaționale. La fel, corelat, funcționează și principiile sistemelor ontologice: emergența-consistentă creează sisteme ontologice iar principiul doi al termodinamicii distruge unele din aceste sisteme: le distruge pe cele care nu îl respectă.

Deci primele două meta-proprietăți sunt fundamentale: geneza și distrugerea sistemelor formal-informaționale este modelată de ele. Celelalte două meta-proprietăți, independența axiomelor și incompletitudinea, nu sunt însă esențiale, adică respectarea sau non-respectarea lor nu are consecințe asupra genezei sau distrugerii sistemelor formal-informaționale, adică orice sistem care nu respectă aceste proprietăți poate să persiste foarte bine.

O axiomă este independentă dacă și numai dacă:

1. Nu poate fi demonstrată ca teoremă din alte două axiome, sau chiar din una prin substituție uniformă,
2. Nu poate fi demonstrată ca teoremă dintr-o altă axiomă și o teoremă deja demonstrată
3. Nu poate fi demonstrată ca teoremă din alte două teoreme deja demonstrate, sau chiar dintr-o teoremă anterior demonstrată prin substituție uniformă.

Dacă poate fi demonstrată ca teoremă, indiferent pe ce cale, ea pierde rolul de axiomă și primește rolul de teoremă, reducându-se în acest fel numărul de axiome. Baza teoretică a acestei meta-proprietăți aparține lui Aristotel[8]: în orice sistem formal trebuie să utilizăm un număr minim de principii. Principiul mai este cunoscut și ca ”briciul” lui Ockham.

Deci dacă un sistem are și axiome ne-necesare(care pot fi demonstrate ca teoreme) va exista doar o încălcare a meta-proprietății dar acest fapt nu repercutează asupra genezei și persistenței lui, adică la geneza sistemului sau la distrugerea sistemului nu participă independența axiomelor. Iar a doua proprietate secundară, ne-esențială este completitudinea:

Un sistem axiomatic-informațional este complet dacă orice propoziție validă în domeniul în care a fost creat sistemul, sistemul formal, este demonstrată ca teoremă în sistemul axiomatic-informațional.

Incompletitudinea, descoperită de Gödel în matematică, părea că evită logica. Dar noi am descoperit că există incompletitudine în unele niveluri ale logicilor modale. Logicile modale se construiesc în ierarhii. Există următoarele niveluri ale ierarhiei validităților modale I1_2[9]:

1. Nivelul tautologic care conține mulțimea infinită a tautologiilor modale: o formulă este tautologie modală, datorită relațiilor dintre elementele componente în raport cu operatorii bi-argumentativi bi-valorici cu negație în infra-logica modală[10].
2. Nivelul pe care l-am descoperit și pe care l-am denumit *general valid*: o formulă este general validă în proiecția decizional-conjunctivă dacă este adevărată în orice logică și în orice sistem care poate fi creat în cel de-al treilea nivel, nivelul *semi-general valid*.

[7] Oancea M., Sistemele lumii cu viață și sistemele logice în Metafizică, logică și spiritualitate, Ed. Printech, B., 2018, p-99.
[8] Aristotel, Metafizica, Ed. IRI, B., 1996, p-128.
[9] Oancea M., Domenii și sisteme ale logicii modale, Ed. Printech, B., 2015, p-74.
[10] Oancea M., Logici propoziționale m-argumentative n-valorice, Ed. Printech, B., 2018, p-61.

3. Nivelul pe care l-am numit semi-general valid: o formulă modală aparţine nivelului semi-general valid dacă şi numai dacă există o logică şi un sistem în care ea este adevărată şi există o logică şi un alt sistem în care ea este falsă.

Ierarhia I1_2(în care raportul aristotelic[11] dintre argumentele propoziţionale ale unei propoziţii implicative cu antecedent şi consecvent, este R1 sau R2) are două proiecţii: o proiecţie decizional-conjunctivă şi o proiecţie axiomatico-disjunctivă.

Prima proiecţie o utilizăm în construcţia decizională a unui sistem: utilizăm o metodă de decizie pentru a selecta formulele valide din mulţimea formulelor bine formate iar pornind de la acestea construim în final reprezentarea lor finită[12].

A doua proiecţie o utilizăm pentru a genera sisteme axiomatice utilizând metoda axiomatică, clasică sau optimală[13].

Noi am creat o primă metodă directă completă(care decide nu numai asupra formulelor din sistemele modale fără noduri de oprire(FD, fără diez) ci şi în sisteme care au noduri de oprire(CD, cu diez)[14]) de decizie modală, metoda viziunilor[15] care ne-a permis să construim ierarhia validităţilor. Rezultatul este redat de teorema fundamentală a proiecţiei decizional-conjunctive: Metoda viziunilor este perfectă(completă). Deci orice formulă din ierarhia infinită a formulelor modale poate fi decisă prin metoda viziunilor, sau în forma corelată, nu există o formulă modală bine formată care să nu poată fi decisă(căreia nu i se poate descoperi validitatea) deci care să nu poată fi poziţionată în cele trei niveluri sau în negaţiile lor(ierarhia integrală a modalităţilor are trei niveluri pozitive(ierarhia pozitivă) şi trei negative(ierarhia negativă)) sau în una din celelalte 3 ierarhii: I3, I4, I5. La nivelul tautologic cele două proiecţii coincid: adică şi orice tautologie într-un sistem axiomatic poate fi demonstrată ca teoremă.

Noi am demonstrat că în nivelul general valid[16] toate sistemele axiomatice, sistemul K, creat de D. Scott şi G. Lemmon şi sistemul GE, creat de noi, sunt incomplete. Deci există în acest nivel, în proiecţia axiomatic-disjunctivă o infinitate de formule care sunt valide şi nu pot fi demonstrate în nici un sistem axiomatic care poate fi creat. Incompletitudinea funcţionează şi pentru unele sisteme axiomatic-informaţionale care pot fi create şi în nivelul semi-general valid.

Deci există, în nivelul general valid, actori, pe care în onoarea lui Gödel, i-am numit vechi gödelieni, G(0/y) în tablourile GE(n) şi G(x/0) în tablourile K(n)[17], care merită să fie demonstraţi şi nu sunt demonstraţi. Din vina cui? Din teorema lui Gödel, nu rezulta a cui era vina? Nu putea să o descopere. Teorema lui demonstrează că axiomatizarea nu este universală, deci dacă toate propoziţiile matematicii sunt formalizate atunci din ele(din aceste formule logice obţinute prin formalizarea predicativă) nu se poate sub nici o formă construi un sistem complet. Fiind în logică, noi luăm o formulă(care în trecutul ei a fost o propoziţie a domeniului matematic, ştiinţific şi care a fost formalizată) şi o re-formalizăm, adică creăm o instanţă a sa, un actor în sistemul formal-informaţional.

Deci cauza că există formule care sunt general-valide(şi deci merită să fie demonstrate ca teoreme) nu constă în faptul că acele formule din sistemul formal ar avea vreun defect, vreo incapacitate, ci se datorează *stilului de axiomatizare(numărul şi tipul de reguli axiomatice acceptate)*, deci constructorului sistemului formal-informaţional axiomatic. Deci vina pentru vechii gödelieni care merită să fie demonstraţi şi sunt conştient acceptaţi ca victime colaterale şi nu sunt demonstraţi o poartă Scott şi Lemmon pentru sistemul K, şi o purtăm noi pentru sistemul GE(real există o infinitate de sisteme K şi GE). Şi noi procedăm în acest fel(sub nici o formă pentru că, ne place!) ca

[11] Oancea M., Logici modale neconexe, Ed. Printech, B., 2017, p-13.
[12] Oancea M., Sisteme modale conexe semi-integrale, Ed. Printech, B., 2017, p-3.
[13] Oancea M., Sisteme axiomatice optimale şi sisteme tautologice, Ed. Printech, B., 2014, p-8.
[14] Oancea M., Domenii şi sisteme ale logicii modale, Ed. Printech, B., 2015, p-109.
[15] Oancea M., Logica modală, Ed. Printech, B., 2003, p-94.
[16] Oancea M., Axiomatizări gödeliene în domeniul K, Ed. Printech, B., 2018, p-91.
[17] Oancea M., Axiomatizări gödeliene în domeniul K, Ed. Printech, B., 2018, p-10.

să putem construi sisteme axiomatice și să le facem persistente, să evităm orice situație de distrugere, de care poate profita dura meta-proprietate de validitate.
Deci teorema fundamentală a proiecției axiomatic-disjunctive este: nu există și nu poate exista un sistem axiomatic care să demonstreze ca teoreme nu numai toate formulele valide în cele trei niveluri(așa cum metoda viziunilor poate decide asupra validității oricărei formule din ierarhie indiferent de nivelul în care se află) dar nu există și nu poate exista pentru nivelul general valid și pentru nivelul semi-general valid, un sistem axiomatic care să demonstreze ca teoreme toate formulele care sunt valide în acel nivel.

BIBLIOGRAPHY

1. G.E. Hughes, M. J. Cresswell, A new introduction to modal logic, Routledge, London, 1996.
2. Klaus G., Logica modernă, Ed. Științifică, B., 1976.
3. Mircea Oancea, Axiomatizări gödeliene în domeniul K, Ed. Printech, B., 2018.
4. Mircea Oancea, Domenii și sisteme ale logicii modale, Ed. Printech, B., 2015.
5. Mircea Oancea, Logici modale neconexe, Ed. Printech, B., 2017.
6. Mircea Oancea, Logica modală, Ed. Printech, B., 2003.
7. Mircea Oancea, Sisteme axiomatice optimale și sisteme tautologice, Ed. Printech, B., 2014.