

L'ARCHITECTURE DE L'INFORMATION DANS LE DISCOURS SCIENTIFIQUE

Cristina-Alice TOMA
Université de Bucarest
Université Libre de Bruxelles
cristina-alice.toma@ulb.ac.be

Abstract:

As the title suggests, we would like to study a peculiarity of the mathematical scientific discourse, namely the *informational organization*. Our theoretical framework is discourse analysis, more precisely, discourse analysis of the Geneva School under the direction of prof. Eddy Roulet. We used the same theoretical framework to characterize the mathematical discourse in French (see Toma 2009, Toma 2017). This general issue brings us to at least two particular goals: on the one hand, we must frame the specificity of the texture of the mathematical discourse (in the framework of the semantic and syntactic modules) and, on the other hand, we must grasp the flow of information in mathematical discourse (in the context of informational and topical organization).

Keywords:

Discourse analysis, informational organization, mathematical discourse, informational and topical organization

Résumé:

Comme le titre l'indique, nous voulons étudier une particularité du discours scientifique mathématique, à savoir l'*organisation informationnelle*. Le cadre théorique choisi est l'analyse du discours, plus précisément, l'analyse du discours de l'école de Genève sous la direction du prof. Eddy Roulet que nous avons utilisé pour caractériser le discours mathématique en langue française (v. Toma 2009, Toma 2017). Cet enjeu général nous amène à au moins deux buts particuliers: d'une part, il faut saisir la spécificité de la texture du discours mathématique (dans le cadre des modules sémantique et syntaxique), d'autre part, il faut saisir le flux de l'information dans le discours mathématique (dans le cadre des organisations informationnelle et topicale).

Mots clé:

Analyse du discours, organisation informationnelle, discours mathématique, informational and organisation informationnelle et topicale

Le modèle d'analyse du discours de l'École de Genève se propose de rendre compte de tout discours :

« Il est important pour l'analyste comme pour le pédagogue, de disposer d'un modèle permettant de décrire toutes les formes de discours, dialogique et monologique, écrit et oral, et de saisir d'abord ce qu'elles ont en commun, au-delà de leurs différences, dont il faudra aussi rendre compte ». (Roulet, 1999 : 143).

1.1. Nous distinguons, premièrement, trois "niveaux de scientificité" (v. Toma 2006) – à savoir, *le discours mathématique de recherche*, *le discours mathématique didactique* et *le discours mathématique de vulgarisation* et nous retenons pour notre analyse *le discours mathématique didactique*. Une deuxième distinction au niveau du discours mathématique est imposée par le contenu même des mathématiques. Cette science n'est pas monolithique, elle comprend plusieurs sous- disciplines (l'algèbre, la géométrie, l'analyse etc.). Vue son étendue, notre étude impose un choix qui est réduit à l'algèbre. Le discours mathématique didactique de l'algèbre a la velléité de nous rendre accès à une synthèse des deux autres niveaux discursifs par un contenu relativement accessible aux non-spécialistes.

1.2. L'analyse modulaire considère le discours¹ comme un objet complexe et elle son organisation saisit aussi bien dans le sens descriptif que dans le sens explicatif.

La construction et l'interprétation du discours sont soumises à trois types de contraintes : *situationnelles*, *linguistiques* et *textuelles*. A partir de ces contraintes on arrive à cinq modules (*lexical*, *syntactique*, *hiérarchique*, *référentiel* et *interactionnel*), définissant cinq types d'informations de base

¹ « On retiendra la définition d'un objet d'étude: le discours comme interaction verbale située, dans ses dimensions linguistiques et situationnelles, la détermination d'un ordre méthodologique d'analyse descendant, de l'interaction verbale aux formes qui constituent, échanges, interventions et actes, le caractère central de l'organisation hiérarchique, la formulation d'hypothèses intéressantes sur les relations entre ces constituants et des informations en mémoire discursive, sur l'organisation polyphonique, sur le repérage de séquences typiques (narrative, délibérative, poétique, etc.), sur les mécanismes inférentiels qui commandent l'interprétation, enfin sur les principes qui régissent l'interaction (comme le ménagement des faces des participants. Mais on observe aussi immédiatement qu'il est très difficile d'articuler des notions issues d'horizons aussi différents.» (Roulet et al. 2001: 25).

qui peuvent être décrits de manière indépendante. Ces cinq modules, par différents couplages entre eux et/ou entre eux et des formes d'organisation simples engendrent des **formes d'organisation simples** (*phono-prosodique ou graphique, sémantique, relationnelle, informationnelle, énonciative, séquentielle, opérationnelle*), respectivement (si au moins une forme d'organisation simple intervient dans le couplage), des **formes d'organisation complexes** (*périodique, topicale, polyphonique, compositionnelle, stratégique*) (cf. Roulet et al. 2001).

Les modules sont des systèmes d'information créés pour répondre aux besoins méthodologiques et didactiques de l'analyse en vue de saisir les éléments qui donnent la complexité du discours l'un après l'autre. Il faut souligner que le modèle attribue une place centrale aux modules qui définissent les structures hiérarchiques récursives : le module syntaxique, le module textuel et le module référentiel.

Les dimensions et les modules impliqués dans l'étude de *l'organisation informationnelle* et de son « correspondant » complexe, *l'organisation topicale*² sont : *la structure hiérarchique, l'organisation relationnelle, la représentation et la structure conceptuelles*. Nous devons préciser ici que, même si l'analyse modulaire du discours distingue une dimension linguistique du discours (avec ses modules : lexical et syntaxique et ses formes d'organisation élémentaires : phono-prosodique ou graphique et sémantique), elle ne s'en occupe qu'indirectement, quand cette dimension est impliquée dans l'étude des autres modules et formes d'organisation. Il existe une seule : l'organisation phono-prosodique qui fait l'objet d'une analyse détaillée, l'organisation périodique. C'est peut-être la raison pour laquelle on n'a pas développé une forme d'organisation complexe à ce niveau-là.

2. Les « auxiliaires » de l'organisation informationnelle : la structure hiérarchique –relationnelle et la dimension référentielle (la représentation et la structure conceptuelle)

2.1. L'analyse modulaire de l'organisation informationnelle du discours se fonde sur l'interrelation des modules hiérarchique et référentiel et

² Il n'y a pas de correspondance entre l'organisation informationnelle et l'organisation topicale d'une part et l'organisation thématique et l'organisation focale, d'autre part telle qu'elles sont définies dans Guțu-Romalo (coord.) 2008: 910, 929.

de la dimension linguistique³. Elle repose principalement sur quelques notions fondamentales que nous allons rappeler en quelques lignes ci-dessous: l'*acte*, le *topique*, le *propos*, la *progression informationnelle* (*linéaire*, à *topique constant* et l'*enchaînement à distance*).

La structure hiérarchique distingue les séquences textuelles dans leur linéarité, en adoptant une méthodologie descendante, et les rapports qui s'établissent entre elles. Ainsi, on identifie *l'échange* (E), *l'intervention* (I) et *l'acte* (A). Ces unités sont reliées entre elles par des règles qui permettent une combinaison récursive, de manière à pouvoir rendre compte de toute structure (v. Roulet et al. 2001 : 53-57).

Les composants d'un échange sont liés par trois types de rapports : *dépendance* (entre les constituants subordonnés et les constituants principaux), *interdépendance* (entre les interventions d'un échange) et *indépendance* (entre les constituants coordonnés).

L'acte – l'unité textuelle minimale – constitue, pour l'organisation informationnelle, le repère aussi bien dans l'identification des *topiques* et des *propos* que dans la *progression informationnelle*. C'est pourquoi nous l'évoquons brièvement.

Pour analyser le discours, l'École genevoise utilise une démarche méthodologique descendante que nous retrouvons aussi chez Bakhtine⁴. Elle part d'une macro unité, le discours, à l'intérieur de laquelle elle distingue des

³ « Il est possible de dégager trois dimensions intervenant dans cette organisation. On peut premièrement évoquer le rôle discret mais non moins important du **module hiérarchique**, dont l'unité minimale, c'est-à-dire l'acte, est le constituant à partir duquel se définit l'organisation informationnelle. Les deux autres dimensions sont constituées par le **module référentiel** et la **dimension linguistique** (regroupant les modules syntaxique, lexical, et les aspects phono-prosodiques), qui interviennent au niveau de la définition des notions d'objet de discours et de point d'ancrage. En effet, comme le concept de topique discuté ci-dessus, ces concepts relèvent à la fois de la **dimension référentielle**, en tant que représentations mentales activées par le discours, et de la **dimension linguistique**, dans la mesure où les marques morpho-syntaxiques et prosodiques indiquent souvent leur état d'activation: les points d'ancrage sont généralement marqués par les termes anaphoriques lorsqu'ils ne sont pas implicites, tandis que les objets de discours sont verbalisés par les formes pleines. » (Grobet 1999: 336-337).

⁴ L'essence véritable du langage, c'est l'événement social qui consiste en une interaction verbale, et se trouve concrétisé en un ou plusieurs énoncés. » (cf. Todorov, T. (1981) : *Mikhail Bakhtine – Le principe dialogique*, suivi de *Écrits de Cercle de Bakhtine*, Paris, Seuil).

unités de plus en plus petites : *l'échange*, *l'intervention* et *l'acte*. L'acte constitue l'unité minimale du discours qu'elle identifie par un passage en mémoire discursive:

« Nous postulons que, pour constituer une étape du processus de négociation sous-jacent à toute interaction, chaque acte doit faire l'objet d'un enregistrement en mémoire discursive. » (Roulet 2001 : 64)

Cette unité minimale, l'acte, est le lieu d'observation et d'auscultation de l'organisation informationnelle, car tout acte active un propos et tout propos s'ancore sur un topique. Le *propos* est défini comme :

« la proposition activée par un acte et dont la connaissance peut être considérée comme étant le résultat de la compréhension de l'acte. La nouveauté de cette proposition résulte de sa relation avec les informations données par le contexte. » (Grobet 2001: 107).

Chaque propos s'ancore sur (au moins) un topique. Ainsi,

« Chaque acte introduit une information dite activée, l'objet de discours⁵, et l'introduction de cette information implique au moins un point d'ancrage en mémoire discursive, le topique, sous la forme d'une information semi-active, qui peut être verbalisée ou non. » (Roulet 2000 : 225).

C'est cette relation étroite – acte – propos – topique – qui donne une grande importance à l'acte dans l'organisation informationnelle.

L'étude des actes peut être approfondie dans une approche de la linguistique textuelle. Dans ce type d'approche, Manzotti souligne la nécessité de s'occuper de la «grammaticalité» du texte. L'appel à l'analyse linguistique du texte, par niveaux, apporte de l'objectivité à la démarche de l'analyste et permet de faire parler la voix du texte.

Pour comprendre le texte d'une manière participative, Manzotti propose la *lecture intensive* qui est applicable aussi bien aux discours littéraires qu'aux discours scientifiques. Selon les dimensions du discours, cette lecture intensive prend soit la forme d'une *macro lecture*, soit la forme

⁵ La notion de *propos* est équivalente à la notion d'objet de discours. Elle a été introduite dans les dernières recherches de l'École genevoise (Roulet et al. 2001).

d'une *micro lecture* ou *lecture analytique*, pour les textes courts ou les fragments de textes⁶.

2.2. Les notions centrales de l'organisation informationnelle sont le *topique*⁷ et la *progression informationnelle*.

Grobet 2001 fait le point sur la notion de *topique* – concept central de toute étude informationnelle du discours, en présentant une synthèse critique des études antérieures et en proposant un regard discursif sur le topique sous la définition suivante:

« Le topique se définit comme une information (un référent ou un prédicat) identifiable et présente à la conscience des interlocuteurs, qui constitue, pour chaque acte, l'information la plus immédiatement pertinente liée par une relation d'à *propos* avec l'information activée par cet acte ».

Le topique est un point d'ancrage, plus précisément, un point d'ancrage immédiat. Les points d'ancrage immédiat s'opposent aux points d'ancrage d'arrière fond. Si tous les points d'ancrage ont la même nature (information stockée en mémoire discursive, dont la source se trouve dans le cotexte, le contexte ou les inférences de l'un ou de l'autre), les topiques se distinguent

⁶ « I concetti-guida della lettura analitica sono l'auscultazione della parola e della frase, la individuazione di tutte le possibili regolarità e irregolarità di significato e di forma, e soprattutto la valutazione delle loro pertinenza. La lettura analitica tenterà in particolare di cogliere come in un testo i livelli espressivi normalmente 'trasparenti' (che cioè non sono percepiti perché sono subordinati alla costruzione del significato) si facciano essi stessi portatori di significati particolari, che interagiscono col significato grammaticale. La descrizione di questa dialettica di significati passa ovviamente per la determinazione esatta del significato letterale, ma richiede letture lente e ripetute, letture aperte ad ogni soprassalto di fantasia interpretativa, che si concentrino sui fatti formali lasciando momentaneamente in sospenso il contenuto letterale. E una lettura che costa fatica, da cui non si può aspettare un piacere immediato, ma che pone le basi per una fruizione meno impressionistica, più profonda. » (Manzotti et al. 1992: 25).

⁷ Il faut noter que cette étude s'appuie sur un cadre théorique précis, celui de l'École genevoise (Roulet et al. 2001) qui ignore la double distinction des oppositions : *thème vs rhème* pour l'organisation thématique et, respectivement, *topique vs focus* pour l'organisation focale (cf. Guțu-Romalo (coord.) 2008: 909).

des points d'ancrage d'arrière fond par leur statut (obligatoire vs facultatif) et par leur nombre ((au moins) un vs indéterminé). (cf. Grobet 2001: 99)⁸.

Les topiques sont classifiés selon plusieurs critères. Un premier critère – la trace topicale – permet le départ entre deux types de topiques: les topiques explicites (qui sont explicités par une trace) et les topiques implicites (dont le repérage n'est pas guidé par une trace). La nature non textuelle des topiques (l'ancrage sur une information présente en mémoire discursive) préconisée dans l'analyse modulaire de l'organisation informationnelle apporte beaucoup d'avantages à l'analyse du flux de l'information dans le DM, comme nous le relèverons par la suite.

Selon un autre critère – l'origine – le topique est soit issu du propos activé par l'acte qui précède (un référent ou l'acte de dire), soit de la situation (un bruit, les interlocuteurs désignés par les pronoms *je*, *tu* etc.). On peut encore faire le départ entre le topique qui a sa source dans le contenu du discours (le dit) et le topique qui a sa source dans le discours lui-même (le dire), c'est-à-dire le topique méta discursif (cf. Grobet 2001: 113).

L'identification des topiques⁹ nécessite un travail de couplage des informations d'ordre hiérarchique et linguistique ou référentiel:

« L'organisation informationnelle résulte du couplage entre des informations hiérarchiques et des informations lexicales ou syntaxiques, si l'acte comporte des traces de point d'ancrage du topique (pronoms, expressions définies, etc.), ou, en l'absence de telles traces, du couplage entre des informations hiérarchiques et des informations référentielles. » (Roulet 1999 : 58).

⁸ Grobet 2001 propose une troisième critère de distinction entre les points d'ancrage immédiat et les points d'ancrage d'arrière fond, critère qui concerne le niveau de leur repérage, à savoir le repérage, basé sur une trace ou implicite pour les points d'ancrage immédiats, respectivement le repérage basé nécessairement sur une trace pour les points d'ancrage d'arrière fond. Or, il s'avère que les traces ne sont pas toujours nécessaires pour le repérage des points d'ancrage d'arrière fond. Par exemple, le "je", sous lequel le locuteur se cache, est un point d'ancrage d'arrière fond d'un dialogue et son repérage n'impose pas sa présence explicite dans le discours sous la forme du pronom *je* ou autrement.

⁹ Le topique qui est de nature référentielle – selon Lambrecht – peut être identifié par la combinaison des caractéristiques d'*identifiabilité*, d'*état d'activation* et – ajoute Grobet – de *relation d'à propos* (v. Grobet 2001: 103).

Les tests utilisés pour l'identification du topique, à part le détachement à gauche et la construction clivée, sont les manipulations formelles (l'interrogation; la négation; la reformulation à l'aide des constructions segmentées et des marques telles qu'à *propos de*, *au sujet de*, *en ce qui concerne* ou *Je vous dis*, *au sujet de X*, *que P*) et l'intonation¹⁰ (cf. Grobet 2001: 122-131).

Pour rendre compte de la continuité informationnelle du discours il faut aussi s'occuper de la progression de l'information. L'identification des types de progression informationnelle revient, en général, à la comparaison des topiques et des propos de deux actes successifs, A1 et A2. Si le topique de l'acte A2 est tiré du propos de l'acte A1, alors la progression informationnelle est linéaire; si le topique de l'acte A2 est identique au topique de l'acte A1, alors la progression informationnelle est une progression à topique constant. La progression à distance intervient quand la source du topique d'un certain acte ne se trouve pas dans l'acte précédent.

Avant de nous pencher sur quelques exemples d'analyse, nous devons faire deux précisions. Premièrement, il est évident que la spécificité du DM n'est pas une affaire de *qualité*, mais de *quantité*, car le DM ne saurait inventer une autre organisation informationnelle, au contraire, celui-ci fait un choix parmi les disponibilités de l'organisation informationnelle du discours en général¹¹. Deuxièmement, l'aspect quantitatif de la spécificité de l'organisation informationnelle du DM ne doit pas être pris nécessairement

¹⁰ Il faut noter que les résultats obtenus par les procédés d'identification des topiques (mais aussi pour d'autres résultats d'analyse modulaire) peuvent être calculés, après coup, par l'intermédiaire des inférences. Les inférences sont des hypothèses attribuées par l'analyste aux interactants. Le calcul inférentiel est fondé sur la combinaison d'informations de natures linguistique, hiérarchique et référentielle. Les inférences nécessaires à l'interprétation d'un énoncé interviennent en deux phases successives: *l'explicitation* – qui assure le passage de la forme logique à la forme propositionnelle – et *l'implication* – qui part de la forme propositionnelle issue de la phase d'explicitation pour aboutir à l'interprétation finale. (v. Roulet et al. 2001: 191-199 et 290-292). Grobet 2001 place l'inférence parmi les moyens d'identification des topiques.

¹¹ S'efforçant de montrer une différence entre la langue commune et le langage scientifique, les scientifiques oublient que souvent ce n'est pas le cas. Par l'exemple, les types de progression informationnelle sont décidément universels: « In lingua generale si può osservare che nella strutturazione tematica lo specialista di solito segue le stesse convenzioni comunemente adottate nel linguaggio generale. » (Gotti 1991: 113).

comme le résultat d'une statistique, mais plutôt comme le résultat d'un examen des extraits du DM attentivement choisis.

L'hypothèse que nous faisons – sans la développer ici – est que le couplage entre l'organisation relationnelle et l'organisation informationnelle peut nous conduire à des résultats importants pour la spécificité du DM. Or, dans notre modèle théorique, le couplage entre ces deux formes d'organisation n'a pas une présence explicite : on traite l'organisation relationnelle, juste en passage, dans le couplage entre l'organisation informationnelle et l'organisation hiérarchique. Un tel couplage fera l'objet de l'organisation topicale, à côté des autres couplages (organisation informationnelle + structure hiérarchique et organisation informationnelle + structure conceptuelle).

3. Étude de cas

3.1. Manzotti montre que la difficulté et l'obscurité des disciplines formelles proviennent du fait que le lecteur ne sait pas comment les 'affronter', comment 'lire' leur langage particulier:

« In gioco non è tanto la questione per qualche tempo alla moda dei 'linguaggi settoriali', in genere ristretta alla problematica delle scelte lessicali, quando piuttosto il genere peculiare di attenzione che deve essere portato al testo, e il genere di proprietà su cui occorre arrestarsi. » (Manzotti et al. 1992: 28).

Si nous prenons comme instrument l'étude textuelle, pour un texte mathématique, l'analyse doit partir d'un regard d'ensemble, pour aboutir à des précisions très fines.

Prenant comme exemple l'énonciation d'un théorème d'algèbre de lycée, la théorème de Cauchy comme celle-ci apparaît dans deux manuels, Manzotti démontre qu'il s'agit d'une seule identité textuelle, cachée sous deux formulations différentes. La lecture de ce théorème peut se faire, dans un premier temps, en identifiant « un periodo ipotetico del tipo 'se si verificano certe proprietà, allora se ne verificano certe altre' ». (Manzotti et al. 1992: 28) et, dans un deuxième temps, en identifiant les objets des discours ('funzione', 'intervallo', 'intervallo aperto', etc.). Mais ces deux étapes de la lecture peuvent toujours laisser le lecteur en confusion à cause des facteurs suivants: (I) le formalisme, essentiel pour le discours mathématique est, par sa nature,

arbitraire; (II) l'ordre des hypothèses par rapport à la conclusion (conclusion – hypothèses ou hypothèses – conclusion) est elle aussi arbitraire; (III) certaines hypothèses sont considérées évidentes dans le contexte donné; (IV) le principe de l'économie maximale des hypothèses peut connaître des atténuations partielles pour des raisons didactiques; (V) la monosémie lexicale, totalement absente du langage courant, est chez elle dans le langage scientifique et technique. Le facteur le plus important serait ce dernier qui est définitoire pour les mathématiques où

« la lettura deve prendere alla lettera ogni parola e costruito », car « Nulla nel linguaggio della matematica è secondario . [...] È per questo d'altronde che la lettura protratta di un testo matematico è una prova di cui solo poche forme di intelligenza, e di memoria, sono all'altezza ». (Manzotti et al. 1992: 29).

Donc, la lecture d'un texte mathématique n'impose pas de règles particulières, mais une lecture analytique intensive. Les facteurs qui pourraient empêcher la compréhension du texte mathématique tiennent soit au rapport entre la langue naturelle et la langue artificielle (cf. Marcus 1970) dans le langage scientifique (I et II), soit à la « contextualisation » mathématique comprise en termes de sous-entendus possibles grâce à l'organisation concentrique des connaissances mathématiques (III-IV). Au-delà de ces difficultés, l'exactitude règne dans le domaine des mathématiques.

Ce caractère précis, régulier et répétitif du discours mathématique nous permet de lancer l'hypothèse que l'analyse d'un cas particulier ouvre facilement la voie vers des conclusions plus larges sur le discours mathématique en général.

3.2. Prenons un fragment d'un cours universitaire d'algèbre linéaire (v. *Annexe I*). Il s'agit d'un paragraphe qui présente une méthode pour la résolution des systèmes d'équations linéaires, la méthode de Gausse.

Nous avertissons que certains concepts mathématiques peuvent rester obscurs pour un novice, fait qui n'empêche pas la compréhension de la démarche analytique discursive.

Nous ne passons pas à l'analyse de notre fragment sans préciser premièrement que des cinq modules de l'analyse modulaire (*lexical, syntaxique, hiérarchique, référentiel et interactionnel*), tous les cinq sont impliqués d'une façon ou d'une autre dans l'étude qui suit, tandis que des sept

formes d'organisations élémentaires (*phono-prosodique, sémantique, relationnelle, informationnelle, énonciative, séquentielle, opérationnelle*) et des cinq formes d'organisation complexes (*périodique, topicale, polyphonique, compositionnelle et stratégique*) nous n'en retenons que cinq que nous considérons pertinentes pour l'objet de notre analyse (*graphique, sémantique, relationnelle, informationnelle* et, respectivement, *topicale*). Ce choix est imposé, d'une part, par le besoin d'établir un ordre relatif dans le foisonnement des "discours mathématiques" que nous essayons de classifier en "niveaux de scientificité" et en "genres scientifiques" à l'aide du module référentiel et de l'organisation interactionnelle (v. Toma 2009), d'autre part, par l'accomplissement de la tâche d'analyse de l'organisation informationnelle et topicale qui fait recours aux autres formes d'organisation mentionnées plus haut.

3.2.1. Organisation informationnelle

Pour simplifier la lecture et la compréhension de notre démarche, nous donnons ci-dessous l'analyse informationnelle complète (topiques, propos, progressions) et détaillée d'un extrait de notre fragment, en gardant les conventions d'analyse proposées par Grobet 2001¹². Les actes sont numérotés en tête de ligne, les traces topicales – en gras (suivies des topiques entre crochets), tandis que les topiques implicites prennent place entre parenthèses au début de l'acte. Nous remplaçons le tableau pour les types de progression informationnelle (cf. Grobet 2001) par les abréviations placées après le numéro de l'acte: L = progression linéaire; TC = progression à topique constant et D = progression à distance. Nous rajoutons aussi, entre parenthèse,

¹² « Chaque acte, numéroté, active un objet de discours. Les traces des points d'ancrage sont indiquées par un style italique ou gras; elles peuvent être pronominales (*c'*, *on*), pleines (*les grands noms*), ou absentes (acte 2, si l'on ne prend pas en compte le pronom *y*). Les points d'ancrage sont explicités entre crochets après leur trace, ou, lorsqu'ils sont implicites, restitués entre parenthèses au début de l'acte (actes 2 et 4). Lorsque les points d'ancrage sont implicites, comme c'est le cas dans ces actes, leur identification se fait par défaut à partir de l'information la plus récemment activée; en dernier recours, on peut considérer, avec Auchlin, qu'ils sont issus de la situation d'énonciation (Auchlin 1986: 183). [...] On distingue les points d'ancrage immédiats, également appelés « topiques », dont les traces sont marquées en gras, et les points d'ancrage d'arrière-fond, qui concernent le plus souvent les interlocuteurs du dialogue et dont les traces sont signalées en italique. [...] Il convient de souligner que seuls les points d'ancrage immédiats – les topiques – sont explicités entre crochets ou entre parenthèses. » (Grobet 2001: 67-68).

après le type de progression par rapport au point d'ancrage immédiat, le type de progression par rapport aux points d'ancrage d'arrière fond.

18. D (7: Metoda lui Gauss) Definiția 1.1:

19. L+D i) Spunem că sistemului (**S**) [13: un sistem de m ecuații și n necunoscute] i s-a aplicat o transformare elementară de tipul (I)

20. TC (+D) dacă **sistemului** [19 : sistemului (**S**)] i se permută două ecuații,

21. L poziția **celorlalte** [20 : ecuații] $m-2$ ecuații rămânând nemodificată:

22. L (21 : poziția celorlalte $m-2$ ecuații rămânând nemodificată)

$$(S): \begin{cases} E_1 \\ \dots \\ E_i \\ \dots \\ E_j \\ \dots \\ E_m \end{cases} \xrightarrow{(I)} (S'): \begin{cases} E_1 \\ \dots \\ E_j \\ \dots \\ E_i \\ \dots \\ E_m \end{cases}$$

23. L (22) Vom folosi notația

$$E_i \leftrightarrow E_j.$$

La littérature de spécialité affirme que le marquage précis de la continuation informationnelle à l'aide des traces topicales rend le discours plus cohésif (ce qui est le cas du DM en général). Par exemple, Gotti qui s'occupe de la référence anaphorique¹³ considère que la référence anaphorique « est un des instruments les plus fréquemment utilisés pour conférer une cohésion meilleure au texte. » (Gotti 1991: 105) (la répétition ou la substitution lexicale, pour le texte juridique)¹⁴.

¹³ Nous devons préciser que les traces topicales sont souvent des anaphores ou, plus rarement des cataphores. (v. Grobet 2001 - Ch. III).

¹⁴ « L'alto grado di relazione che si riscontra tra aspetti epistemologici e realizzazione testuale costituisce una caratteristica costante dei testi specialistici a fa sì che la realizzazioni stesse – seguendo un processo argomentativo comune e standardizzato – siano a loro volta altamente codificate. Come bene afferma Arcaini (1988, p. 35): "Le caratteristiche di un linguaggio settoriale nel suo costituirsi in testo non sono un fatto strettamente linguistico, ma

Nous pensons qu'une telle hypothèse – la cohésion est donnée par l'abondance de traces topicales – est soutenable dans une approche textuelle (où l'on cherche à relever les supports linguistiques de l'enchaînement informationnel dans le texte), mais pas dans une approche discursive (où le flux informationnel est saisi au niveau de la mémoire discursive et non pas au niveau du texte en soi). Par contre, nous montrons ici que les topiques implicites jouent un rôle important dans le flux informationnel du DM.

Il faut remarquer la spécificité, d'une part, de la nature des traces topicales, d'autre part, du type d'information même que les topiques comprennent. Ainsi, les traces topicales sont : substantivales (nom ou syntagme ayant comme tête un nom) (*Metoda lui Gauss, sistemului*) ; symboliques (langue artificielle) ((*S*), l'acte 22) ; pronominales (*celorlalte*) ; verbale (*poziția celorlalte m-2 ecuații rămânând nemodificată*) ou propositionnelles (l'acte 22).

L'analyse du corpus montre que la trace topicale du discours mathématique, quand elle est présente (il y a beaucoup de topiques implicites), est un nom ou un syntagme nominal ayant comme tête un nom (sistemului (*S*)). Ce fait doit avoir la source dans la quête de l'exactitude, l'information d'un nom étant plus forte que l'information d'un pronom.

Les propos activent les deux types d'information ensemble – l'information donnée en langage naturel et l'information donnée en langage artificiel, symbolique – (par exemple, dans l'acte [19] *i s-a aplicat o transformare elementară de tipul (I)*, dans l'acte [22] *Vom folosi notația [...]*), pour qu'elles soient ultérieurement reprises sur la seule forme artificielle, soit dans les topiques, soit dans les propos qui suivent (par exemple, le fragment 108. où, topique et propos sont exclusivement en langage artificiels et nous n'avons plus procédé à une segmentation en actes).

un tipo di ragionamento (di argomentazione) legato alla natura dell'oggetto da dibattere. Il costituirsi (attraverso le proprietà del linguaggio comune) di una tassonomia linneana o le argomentazioni giuridiche circa un fatto che riguarda la giurisprudenza hanno percorsi obbligati, che dipendono dalla natura delle discipline, ne rappresentano le regole costitutive, e sono relativamente indipendenti dalla persona che li usa." » (Gotti 1991: 119).

3.2.2. Organisation topicale : organisation informationnelle et structure hiérarchique

L'organisation topicale¹⁵, forme d'organisation complexe, traite les liens conceptuels entre les objets de discours. Le couplage de la structure hiérarchique et de l'organisation informationnelle rend compte de l'enchaînement à distance et de la hiérarchie des objets de discours en distinguant les objets de discours principaux et les objets de discours secondaires. « Un objet de discours est principal ou subordonné par rapport à un autre en fonction de la place occupée dans la structure hiérarchique par l'acte qui l'active. » (Roulet, 1999 :61).

La démarche utilisée par l'analyse modulaire dans l'identification des unités textuelles va de haut en bas. Cette manière d'appréhender les données est très utile pour saisir la spécificité du DM, car, effectivement, au niveau macro -discursif il y a beaucoup de régularités intéressantes.

Dans notre fragment, négligeant les titres et les sous-titres (d'ailleurs, ceux-ci sont repérables dans tout discours, qu'il soit mathématique ou non), nous observons des régularités répétitives qui comprennent: un *concept central* (*Metoda lui Gauss* sau *Metoda eliminărilor succesive*), des *notations* préliminaires, *des définitions* (*transformare elementară de tipul (I), (II), (III)* et *système équivalente*), *des propriétés – remarques* et des *théorèmes* concernant la notion qu'on vient de définir, sa *notation*, des *exemples* concernant les propriétés et *des exercices* censés vérifier le degré de maîtrise des connaissances acquises dans les segments antérieurs. C'est la structuration du DM grâce au *concepts méta-mathématiques* (v. Toma 2006).

La structure hiérarchique émerge du processus de négociation conçu comme un dialogue entre le mathématicien (l'entité rationnelle) et la vérité mathématique. Elle est réduite à l'enchaînement emboîté des *actes* (A) et des *interventions* (I) qui organise le discours en fonction de leur positionnement et leur interaction relationnelle. (Toma 2009: 32-42). La structure

¹⁵ L'organisation informationnelle ne permet pas d'identifier l'objet de discours qui occupe une place centrale dans le discours, ni de rendre compte d'enchaînements tropicaux à distance. Elle ne permet pas non plus de rendre compte des choix de l'interlocuteur parmi les différents enchaînements possibles à chaque étape de la formulation d'une réponse à une question délicate (cf. Roulet 1996: 21-22). C'est pourquoi l'analyse de l'organisation topicale s'impose comme une continuation nécessaire de l'analyse de l'organisation informationnelle, comme son complément.

hiérarchique et les concepts méta- mathématiques structurants du DM sont en rapport dynamique avec l'organisation informationnelle du DM (v. *Annexe 3*)

L'analyse du corpus élargi nous permet d'affirmer qu'il existe un prototype d'organisation textuelle du DM via les méta- concepts qui contient (avec une plus grande ou une plus petite rigueur) les éléments suivants: l'introduction ou la nomination d'une entité, sa définition, des exemples, des propriétés (qui peuvent prendre la forme de propositions ou de théorèmes), des exceptions, des cas particuliers ou des conséquences de ces propriétés (qui peuvent prendre la forme de corollaires) et un développement (des applications, des exercices, des problèmes). Ce système méta-conceptuel constitue un support d'information de type *topique* sur laquelle s'ancre constamment l'information de type *propos*.

Au premier niveau d'emboîtement, la structure hiérarchique de chaque fragment marque la présence d'un titre (de chapitre ou de paragraphe) qui est une intervention secondaire, contenant un seul acte, par rapport au reste du fragment qui constitue une intervention principale très riche en actes (par exemple, *Sisteme de ecuații liniare*). Les topiques implicite sont majoritaires.

Au deuxième niveau d'emboîtement, premièrement, on continue à introduire des sous-titres (proprement- dits, par exemple, acte 7. 1. *Metoda lui Gauss*) et , deuxièmement, on commence à introduire le passage entre le langage naturel et le langage artificiel, à savoir les concepts métadiscursifs (par exemple, 18. *Definiția 1.1*, *Definiția 1.2*, 40. *Teorema 1.3*, *Teorema 1.4*) ou les notations (par exemple, Ap 15. Notăm cu [...], 23. *Vom folosi notația [...]*). Nous sommes à ce point au niveau des entités textuelles distinguées plus haut. Le fait que parfois la définition occupe une position plus basse, dans la structure hiérarchique, tandis que les notations occupent une position plus haute est dû à leurs co-textes respectifs: la définition est un préambule pour le théorème qui suit, les notations sont précédées d'une description générale du but de leur introduction. Toujours sur le deuxième niveau d'emboîtement, nous observons la préférence pour l'introduction de plusieurs interventions coordonnées qui occupent des espaces quasi-équivalents (v., par exemple, I 19.-23 ; I 24.-28. et I 29.-33). Les concepts méta- mathématiques sont introduits en tant que propos pour devenir au niveau suivant des topiques implicites.

Au troisième niveau d'emboîtement, on accomplit l'introduction des définitions et des notations, et on commence l'introduction des exemples, des remarques et des théorèmes avec leurs démonstrations. Nous pouvons

conclure à l'issue de cette analyse, que les concepts méta -mathématiques et les concepts mathématiques occupent des places précises dans les textes, la définition détenant une place médiane entre les deux catégories. La progression linéaire ou à topique constant, basée généralement sur les points d'ancrage immédiats est doublée par une progression à distance qui s'appuie souvent sur les points d'ancrage d'arrière fond et des topiques implicites. La conscientisation de la hiérarchisation de l'information facilite l'identification des topiques implicites dont le nombre augmente à ce niveau d'emboîtement. La profondeur de la structure hiérarchique atteint le niveau maximal au cours des démonstrations des théorèmes et elle correspond au niveau des calculs cognitifs maximaux. D'où la réputation des mathématiques comme science abstraite et difficile.

3.2.3. Organisation topicale : organisation informationnelle et la structure conceptuelle

Le couplage de la structure conceptuelle et de l'organisation informationnelle rend compte de la continuité de l'information et de la dérivation de l'objet de discours. « Un objet de discours qui domine un autre objet de discours dans la structure conceptuelle est premier par rapport à celui-ci et celui-ci est dérivé du premier. » (Roulet, 1999 :62). La **structure conceptuelle** rend compte de la place occupée dans le texte effectif par les concepts desquels il traite. Elle se distingue ainsi de la **représentation conceptuelle** qui applique en traitement cognitif extra discursif aux concepts (cf. Roulet et al. 2001, Toma 2009).

La spécificité du DM consiste dans l'identité des structures conceptuelles d'un concept mathématique étant donnée la nature référentielle de ces structures (NB les structures conceptuelles ne sont pas textuelles!). Par conséquent, le fait qu'une certaine propriété d'un concept soit textualisée/verbalisée ou pas, n'est pas significatif pour la structure conceptuelle d'un terme mathématique. Dès qu'il est actualisé dans un certain contexte, le concept mathématique renvoie sans autre choix à un ensemble fixe de propriétés qui l'individualisent. Par exemple, si l'on ouvre un manuel de mathématiques et si l'on lit " $N = 0, 1, 2, 3, \dots$ est l'ensemble des entiers naturels.", alors on pensera précisément au concept mathématique d'« ensemble » qui a une certaine notation, qui a certains éléments permettant

certaines opérations et pas d'autres et non pas à un autre sens du mot *ensemble* ("Ils sont *ensemble* depuis toujours.").

Les concepts mathématiques ne dérivent pas l'un de l'autre, comme c'est le cas pour la langue commune (cf. Roulet et al. 2001). Il est évident qu'ils entretiennent des relations très étroites entre eux, mais il nous semble inexacte de les appeler des relations de "dérivation". En effet, les relations qui se tissent entre les concepts mathématiques sont soit des relations d'inclusion (« metode directe » inclut « *Metoda lui Gauss* »), soit des relations de définition (un « un sistem de m ecuații și n necunoscute » est un « un sistem de ecuații »), soit des *relations* d'appartenance ou de structuration, pour les concepts méta-mathématiques (« *transformare elementară de tipul (I)* » a une « définition » et une « notation »).

En tenant compte de cette re-interprétation de la relation de "dérivation" entre les concepts mathématiques, le couplage informationnel-structure conceptuelle nous relève le parcours informationnel du DM (v. le parcours informationnel qui inclut la construction *fie x*).

Le couplage entre l'organisation informationnelle et la structure conceptuelle met en évidence les *objets de discours premiers* et les *objets de discours dérivés* (pour éviter l'ambiguïté que ce terme pourrait provoquer pour le DM, nous préférons le terme de *concept relié*). Par exemple, le concept de « forma triunghiulară a sistemului (S) », est relié au concept de « sisteme echivalente » qui, à son tour, est relié du concept de « transformare elementară »; et la chaîne peut continuer avec « *sisteme de ecuații elementare* ».

Nous postulons que le poids informationnel d'un concept augmente avec l'augmentation du nombre des concepts avec lesquels il est relié. La structure conceptuelle nous permet d'identifier les concepts ayant un nombre riche de concepts reliés. Ceux-ci sont d'habitude introduits dans le texte en tant que *propos* et ils deviennent des topiques implicites. Par exemple, un concept (propos) comme « *Metoda lui Gauss* » et reliés avec plusieurs concepts dans la structure conceptuelle (« forma triunghiulară a sistemului (S) », « sisteme echivalente », « transformare elementară », etc.) et il a un *poids informationnel* plus lourd qu'un concept placé plus bas dans la hiérarchie de la richesse structurelle conceptuelle, tout en ayant moins de concepts reliés (par exemple, « ecuații liniare »).

Le DM a la particularité informationnelle de doubler la progression informationnelle linéaire ou à topique constant avec la progression à distance

qui prend pour topique en point d'encrage d'arrière fond identifiable dans un concept placé en haut de la structurelle conceptuelle du texte et ayant, par conséquent, un nombre plus riche de concepts reliés que les topiques explicites. Cette progression informationnelle est traductible dans la construction complexe du raisonnement mathématique. De ce fait elle est présente surtout dans les démonstrations des théorèmes.

4. La construction *Fie x* et l'entité rationnelle

La construction *Fie x* a une occurrence fréquente dans le DMD. Sa fréquence (une moyenne placée entre 0,7 et 1,5 occurrences par page), mais surtout sa spécificité pour le DMD (on ne le rencontre nulle part ailleurs) lui donnent un statut spécial.

La forme détaillée de cette construction pourrait être représentée ainsi :

$$Fie + a + b$$

où a et b sont d'habitude deux séquences complémentaires du point de vue du matériel d'expression: si la première séquence a est de nature symbolique ((S) și (S') ; i), la deuxième séquence b appartient à la langue naturelle (*două sisteme de m ecuații liniare și cu n necunoscute, indicele minim cu proprietatea că $a_{i1} \neq 0$*), l'inverse restant rare. Par exemple :

Teorema 1.3: *Fie (S) și (S') două sisteme de m ecuații liniare și cu n necunoscute. Dacă (S) și (S') sunt sisteme echivalente, atunci (S) și (S') au aceleași soluții.*

(Dăuș 2009: 111)

Demonstrație: Deoarece prima coloană a matricei A este nenulă, atunci există cel puțin un element nenul pe această coloană. Fie i indicele minim cu proprietatea că $a_{i1} \neq 0$. Dacă $i = 1$, atunci prima ecuație a sistemului are coeficientul lui x_1 nenul. Dacă $i > 1$, atunci permutând între ele ecuațiile E_1 și E_i obținem un sistem echivalent cu sistemul inițial, având coeficientul lui x_1 nenul în prima ecuație.

(Dăuș 2009: 111)

La formule *Fie X* est secondée – mais de loin – au niveau de la fréquence et du rôle rempli dans le DM par les expressions *Considerăm că*, *Presupunem că*, *Spunem că*. Le DM préfère l'association de la modalité déontique d'*obligation* avec l'effacement du sujet énonciateur. À l'entité

rationnelle inclusive – composée par la paire énonciateur/ destinataire – le DM ajoute et favorise une entité rationnelle impersonnelle. La valeur verbale impérative inclusive des verbes *Considerăm*, *Presupunem*, *Spunem* est similaire avec la valeur modale de *Fie*. Nous pourrions ainsi signaler une valeur modale impérative pour la troisième personne d'une forme du conjonctif qui perd la conjonction *să*.

Si nous prenons la séquence *Fie (S) și (S') două sisteme de m ecuații liniare și cu n necunoscute*, nous optons pour garder un seul acte, non pas parce que *(S) și (S')* ne 'contiendrait' pas l'information '*două sisteme de m ecuații liniare și cu n necunoscute*', mais parce que c'est le point du discours où *(S) și (S')* 'reçoit' cette propriété et, donc l'association a la valeur d'une apposition déterminative.

Fie (S) și (S') fait partie de l'objet de discours introduit par l'acte [41] "*Fie (S) și (S') două sisteme de m ecuații liniare și cu n necunoscute*". La progression de l'information entre les actes [39] – [40] – [41] est linéaire. L'élément symbolique *((S) și (S'))* devient la trace topicale¹⁶ dans l'acte qui suit en assurant la correspondance entre le monde mathématique abstrait exprimé à l'aide de la langue artificielle et le monde représenté par les mathématiques¹⁷ traduit à l'aide de la langue naturelle. L'information contenue par l'acte 40 est segmentée à cause de la présence de *Fie (S) și (S')* en deux parties qui n'ont pas le même type de contribution informationnelle. L'information de *Fie (S) și (S')* est plus forte; c'est une information *posée*; le reste de l'acte "*două sisteme de m ecuații liniare și cu n necunoscute*" apporte une information plus faible; c'est une information *présupposée*. Si l'on affinait l'étude informationnelle, cette construction représenterait un point d'ancrage secondaire pour l'acte [40] (à côté du topique implicite "**Teorema 1.3**"), tandis qu' "*două sisteme de m ecuații liniare și cu n necunoscute*" fait partie de l'univers des connaissances encyclopédiques du locuteur. Il semble que *Fie (S) și (S')* opère une inversion entre l'objet de discours et le point d'ancrage immédiat.

Comme cette construction est une partie d'un acte secondaire, elle introduit un objet de discours secondaire, en laissant s'entrevoir un "souvenir"

¹⁶ Une étude minutieuse sur le langage symbolique pourrait nous dire si un symbole serait une trace ou s'il est le topique même, fait qui modifierait le type de progression.

¹⁷ On prend l'hypothèse positiviste qui soutient que les mathématiques représentent le monde réel.

d'un point d'ancrage immédiat. Ce fait ne doit pas être indifférent à l'appui de la construction du raisonnement mathématique à l'aide de symboles.

Au niveau de la structure hiérarchique et de la structure conceptuelle aussi, toutes les constructions du type *Fie x* font partie d'un niveau bas d'emboîtement, respectivement de la chaîne de dérivation. Elles sont plutôt orientées vers l'ouverture d'une dérivation conceptuelle située sur l'axe horizontal de la même structure, dérivation dont elle constitue le premier élément.

5. Conclusions

Le modèle de l'analyse modulaire nous permet de saisir ce qui est commun et ce qui distingue le discours scientifique mathématique d'autres discours, mais il ne faut pas le prendre tel quel, car certains inconvénients s'imposent à l'évidence. Ainsi, les critères utilisés pour le découpage en actes doivent être adaptés pour pouvoir rendre compte des segments de discours qui sont constitués du langage symbolique (artificiel). En outre, le fondement même de la structure hiérarchique, le processus de négociation, doit être révisé, car derrière le DM ne se cache pas toujours une négociation véritable, entre deux sujets parlants. Or, il faut admettre qu'un dialogue scientifique – science est envisageable.

Il faudra remanier aussi les notions de *représentations et structures conceptuelles* qui s'avèrent soit quasi-équivalentes, soit multiples (les propriétés mathématiques et leurs « correspondants » méta-mathématiques).

Nous venons de passer en revue les points faibles de notre instrument d'analyse. Mais, au niveau de l'organisation informationnelle même, il y a beaucoup de points forts. L'introduction de la notion de *topique implicite* nous semble cruciale et très productive dans l'étude du DM. En outre, l'analyse linguistique et référentielle des traces topicales peut, à son tour, apporter des éclaircissements importants sur l'organisation informationnelle du DM.

Il nous semble évident que le DM ne saurait pas inventer d'autres types de progression informationnelle que le discours général, mais il fait appel d'une manière spécifique à leur utilisation. La progression L et la progression à TC s'associe parfois avec la progression à distance grâce à l'activation simultanée des points d'ancrage immédiats et des points d'ancrage d'arrière fond. Cet activage est signalé par des traces topicales, souvent en langage artificielle ou nominales et les topiques implicites.

L'étude peut être enrichi par le fait d'affiner l'analyse de l'expression *Soit x*. Il reste encore des ressources du cadre théorique à explorer, notamment le couplage relationnel + informationnel qui, tout en enrichissant le couplage hiérarchique + informationnel et conceptuel + informationnel, nous permettra de mieux comprendre, entre autres, le rôle des connecteurs dans l'organisation informationnelle.

Sortir du cadre théorique choisi ouvrira aussi de nouvelles perspectives d'analyse.

Bibliographie

- GOTTI, Maurizio. 1991. *I linguaggi specialistici: Caratteristiche linguistiche e criteri pragmatici*. Scandicci: Nuova Italia.
- GROBET, Anne. 1999. "L'organisation topicale de la narration. Les interrelations de l'organisation topicale et des organisations séquentielle et compositionnelle." *Cahiers de linguistique française* 21: 329–368.
- GROBET, Anne. 2001. *L'identification des topiques dans les dialogues*, thèse no 472. Genève.
- GUȚU-ROMALO, Valeria (coord.). 2008. *Gramatica limbii române*. București: Editura Academiei Române.
- MANZOTTI, Emilio; BARDAZZI, Giovanni; DANZI, Massimo; TERZOLI, Maria Antonietta, 1992, *Lezioni sul testo: modelli di analisi letteraria per la scuola*. Brescia: La Scuola.
- MARCUS, Solomon. 1970. *Poetica matematica*. București: Editura Academiei.
- ROULET, Eddy. 2001. "Un modèle et un instrument d'analyse de la complexité de l'organisation du discours." In *Lengua, discurso, texto (Actas del I Simposio Internacional de Analisis del Discurso)*, vol. I, 133-157. Madrid: Visor libros.
- ROULET, Eddy; FILLIETTAZ, Laurent; GROBET, Anne, with the collaboration of Marcel Burger. 2001. *Un modèle et un instrument d'analyse de l'organisation du discours*. Bern: Peter Lang.
- ROULET, Eddy. 1999. *La description de l'organisation du discours. Du dialogue au texte*. Paris: Didier.
- ROULET, Eddy. 2000. "Une approche modulaire de la complexité de l'organisation du discours." In *Approches modulaires: de la langue au*

- discours*, edited by Henning Nølke, and Jean-Michel Adam, 187-258. Lausanne: Delachaux & Niestlé.
- ROULET, Eddy. *French-English Glossary of linguistic terms. English definitions of key terms in the Geneva modular approach to discourse analysis* (Translation by Catherine Walther Green), <https://feglossary.sil.org/sites/feglossary/files/amden.pdf>
- TODOROV, Tzvetan. 1981. *Mikhaïl Bakhtine-le principe dialogique*, suivi de *Ecrits du cercle de Bakhtine*. Paris: Editions du Seuil.
- TOMA, Alice. 2004. "Cohésion informative du discours scientifique mathématique." In *Actes du JADT*, Bruxelles: JADT.
- TOMA, Alice. 2006/2008. *Lingvistică și matematică: terminologie, limbaj, discours, interdisciplinaritate*. București: Editura Universității din București.
- TOMA, Alice. 2009. *Pragmatique informationnelle du discours scientifique*, București: Editura Universității din București.
- TOMA, Alice. 2017. *L'architecture relationnelle du texte scientifique. Généralisation, particularisation, exemplification, exception, reformulation*, Bruxelles : EME Éditions.

Corpus

- DĂUȘ, Leonard. - *Algebră liniară și geometrie analitică*. http://www.academia.edu/13427584/Leonard_D%C4%83u%C5%9F_ALGEBR%C4%82_LINIAR%C4%82_%C5%9Fi_GEOMETRIE_ANALITIC%C4%82

Sisteme de ecuatii liniare

- metode directe: presupun obținerea soluției exacte a sistemului după un număr finit de operații elementare;
- metode iterative: se bazează pe folosirea unei aproximații inițiale care se îmbunătățește de la o etapă la alta.

Prezentăm în această secțiune cea mai simplă metodă directă de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare, numită *Metoda lui Gauss* sau *Metoda eliminărilor succesive*. Această metodă are la bază ideea transformării sistemului dat într-un sistem superior triunghiular sau trapezoidal prin eliminarea succesivă a necunoscutelor și apoi folosirea procedurii de substituție inversă pentru rezolvarea sistemului obținut. Considerăm un sistem de m ecuații și n necunoscute:

Notăm cu

matricea coeficienților sistemului, respectiv matricea extinsă a sistemului. Putem presupune că fiecare coloană a matricei [sic !] A este nenulă, în caz contrar sistemul (S) putându-se înlocui cu un sistem cu număr mai mic de necunoscute.

$$(S): \begin{cases} E_1 \\ \dots \\ E_i \\ \dots \\ E_j \\ \dots \\ E_m \end{cases} \xrightarrow{(I)} (S'): \begin{cases} E_1 \\ \dots \\ E_j \\ \dots \\ E_i \\ \dots \\ E_m \end{cases}$$

Vom folosi notația

$$E_i \leftrightarrow E_j.$$

ii) Spunem că sistemului (S) i s-a aplicat o transformare elementară de tipul (II) dacă o ecuație a sistemului se înmulțește cu o constantă nenulă, celelalte m-1 ecuații rămânând nemodificate:

$$(S): \begin{cases} E_1 \\ \dots \\ E_i \\ \dots \\ E_m \end{cases} \xrightarrow{(II)} (S'): \begin{cases} E_1 \\ \dots \\ \lambda E_i \\ \dots \\ E_m \end{cases}$$

Vom folosi notația

$$\lambda E_i.$$

iii) Spunem că sistemului (S) i s-a aplicat o transformare elementară de tipul (III) dacă unei ecuații a sistemului i se adună o altă ecuație multiplicată cu o constantă nenulă, celelalte m-1 ecuații rămânând nemodificate:

$$(S): \begin{cases} E_1 \\ \dots \\ E_i \\ \dots \\ E_j \\ \dots \\ E_m \end{cases} \xrightarrow{(III)} (S'): \begin{cases} E_1 \\ \dots \\ E_i \\ \dots \\ E_j + \lambda E_i \\ \dots \\ E_m \end{cases}$$

Vom folosi notația

$$E_j + \lambda E_i.$$

Definiția 1.2: Două sisteme de ecuații elementare (S) și (S') se numesc sisteme echivalente dacă sistemul (S') se obține din sistemul (S) printr-un număr finit de transformări elementare de tipul (I), (II) sau (III). Vom desemna acest lucru prin notația $(S) \sim (S')$.

Observație: Relația “ \sim ” este o relație de echivalență pe mulțimea sistemelor de m ecuații liniare și cu n necunoscute.

Teorema 1.3: Fie (S) și (S') două sisteme de m ecuații liniare și cu n necunoscute. Dacă (S) și (S') sunt sisteme echivalente, atunci (S) și (S') au aceleași soluții.

Demonstrație: Ținând cont de definiția sistemelor echivalente, precum și de observația anterioară, ne putem reduce la cazul în care (S') se obține din (S) printr-o singură transformare elementară de tipul (I), (II) sau (III). În acest caz este evident că orice soluție a sistemului (S) este soluție și a sistemului (S').

Pe de altă parte, deoarece sistemul (S) se obține din sistemul (S') printr-o transformare elementară de tipul (I), (II) sau (III), orice soluție a sistemului (S') este soluție a sistemului (S) și astfel teorema este demonstrată. ■

Teorema 1.4

Teorema 1.4: Orice sistem (S) cu m ecuații liniare și n necunoscute este echivalent cu un sistem (\bar{S}) de forma:

$$(\bar{S}) : \begin{cases} \bar{a}_{11}x_1 + \dots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1 \\ \bar{a}_{2k_2}x_{k_2} + \dots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2 \\ \bar{a}_{3k_3}x_{k_3} + \dots + \bar{a}_{3n}x_n = \bar{b}_3 \\ \dots \\ \bar{a}_{rk_r}x_{k_r} + \dots + \bar{a}_{rn}x_n = \bar{b}_r \\ 0 = \bar{b}_{r+1} \\ \dots \\ 0 = \bar{b}_n \end{cases}$$

unde $\bar{a}_{11}, \bar{a}_{2k_2}, \bar{a}_{3k_3}, \dots, \bar{a}_{rk_r} \neq 0$ și $1 < k_2 < k_3 < \dots < k_r$. (\bar{S}) se va numi forma triunghiulară a sistemului (S).

Demonstrație: [...]

Observație: 1. Sistemul (S) este compatibil dacă și numai dacă în forma (\hat{S}) nu apar ecuații de forma $0 = \hat{b}_p$, cu \hat{b}_p nenul.

2. [...]

Exercițiul 1: Să se rezolve, cu ajutorul metodei lui Gauss, sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1 \end{cases}$$

Soluție: Vom folosi algoritmul descris în demonstrația *Teoremei 1.4* pentru a găsi forma triunghiulară a sistemul dat. Cu ajutorul transformărilor elementare (I), (II) și (III) sistemul se poate scrie succesiv astfel:

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} E_2 + (-1)E_1 \\ E_3 + (-1)E_1 \\ E_4 + (-1)E_1 \\ E_5 + (-1)E_1 \end{matrix}} \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\ -3x_3 + 2x_4 + x_5 = -2 \\ -5x_2 - 4x_3 + 3x_4 - x_5 = 2 \\ -7x_2 - 4x_3 + 5x_4 - x_5 = 2 \\ -x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 = -2 \end{cases} \\
 & \xrightarrow{E_2 \leftrightarrow E_5} \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 = -2 \\ -5x_2 - 4x_3 + 3x_4 - x_5 = 2 \\ -7x_2 - 4x_3 + 5x_4 - x_5 = 2 \\ -3x_3 + 2x_4 + x_5 = -2 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} E_3 + (-5)E_2 \\ E_4 + (-7)E_2 \end{matrix}} \\
 & \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 = -2 \\ 16x_3 - 12x_4 - 6x_5 = 12 \\ 24x_3 - 16x_4 - 8x_5 = 16 \\ -3x_3 + 2x_4 + x_5 = -2 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} \frac{1}{2}E_3 \\ \frac{1}{2}E_4 \\ \frac{1}{8}E_4 \end{matrix}} \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 = -2 \\ 8x_3 - 6x_4 - 3x_5 = 6 \\ 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 2 \\ -3x_3 + 2x_4 + x_5 = -2 \end{cases} \\
 & \xrightarrow{E_3 \leftrightarrow E_4} \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 = -2 \\ 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 2 \\ 8x_3 - 6x_4 - 3x_5 = 6 \\ -3x_3 + 2x_4 + x_5 = -2 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} E_4 + \left(\frac{8}{3}\right)E_3 \\ E_5 + E_4 \end{matrix}} \\
 & \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 = -2 \\ 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 2 \\ -\frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 = \frac{2}{3} \\ 0 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Putem acum să tragem următoarele concluzii: sistemul dat este compatibil nedeterminat, x_1, x_2, x_3, x_4 sunt necunoscute principale, iar x_5 este necunoscută secundară. Utilizând substituția inversă găsim:

$$x_1 = -\frac{\alpha}{2}, \quad x_2 = -1 - \frac{\alpha}{2}, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = -1 - \frac{\alpha}{2}, \quad x_5 = \alpha$$

cu $\alpha \in \mathbf{R}$. \square

Exercițiul 2 [...]
(Dăuș 2018: 209-214).

Annexe 2

Découpage en actes

1. Sisteme de ecuatii liniare

2. Metodele de rezolvare ale sistemelor de ecuații liniare se împart în două categorii:
3. - metode directe:
4. presupun obținerea soluției exacte a sistemului după un număr finit de operații elementare;
5. - metode iterative:
6. se bazează pe folosirea unei aproximații inițiale care se îmbunătățește de la o etapă la alta.
7. 1. *Metoda lui Gauss*
8. Prezentăm în această secțiune cea mai simplă metodă directă de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare,
9. numită *Metoda lui Gauss* sau
10. *Metoda eliminărilor succesive*.
11. Această metodă are la bază ideea transformării sistemului dat într-un sistem superior triunghiular sau trapezoidal prin eliminarea succesivă a necunoscutelor
12. și apoi folosirea procedurii de substituție inversă pentru rezolvarea sistemului obținut.
13. Considerăm un sistem de m ecuații și n necunoscute:
- 14.

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

15. Notăm cu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad A^e = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

matricea coeficientilor sistemului, respectiv matricea extinsă a sistemului.

16. Putem presupune că fiecare coloană a matricea [sic !] A este nenulă,
17. în caz contrar sistemul (S) putându-se înlocui cu un sistem cu număr mai mic de necunoscute.
18. **Definiția 1.1:**
19. i) Spunem că sistemului (S) i s-a aplicat o transformare elementară de tipul (I)
20. dacă sistemului i se permută două ecuații,
21. poziția celorlalte $m-2$ ecuații rămânând nemodificată:

$$(S): \begin{cases} E_1 \\ \dots \\ E_i \\ \dots \\ E_j \\ \dots \\ E_m \end{cases} \xrightarrow{(I)} (S'): \begin{cases} E_1 \\ \dots \\ E_j \\ \dots \\ E_i \\ \dots \\ E_m \end{cases}$$

- 22.

23. Vom folosi notația

$$E_i \leftrightarrow E_j.$$

24. ii) Spunem că sistemului (S) i s-a aplicat o transformare elementară de tipul (II)

25. dacă o ecuație a sistemului se înmulțește cu o constantă nenulă,

26. celelalte m-1 ecuații rămânând nemodificate:

27.

$$(S): \begin{cases} E_1 \\ \dots \\ E_i \\ \dots \\ E_m \end{cases} \xrightarrow{(II)} (S'): \begin{cases} E_1 \\ \dots \\ \lambda E_i \\ \dots \\ E_m \end{cases}$$

28. Vom folosi notația

$$\lambda E_i.$$

29. iii) Spunem că sistemului (S) i s-a aplicat o transformare elementară de tipul (III)

30. dacă unei ecuații a sistemului i se adună o altă ecuație înmulțită cu o constantă nenulă,

31. celelalte m-1 ecuații rămânând nemodificate:

32.

$$(S): \begin{cases} E_1 \\ \dots \\ E_i \\ \dots \\ E_j \\ \dots \\ E_m \end{cases} \xrightarrow{(III)} (S'): \begin{cases} E_1 \\ \dots \\ E_i \\ \dots \\ E_j + \lambda E_i \\ \dots \\ E_m \end{cases}$$

33. Vom folosi notația

$$E_j + \lambda E_i.$$

34. Definiția 1.2:

35. Două sisteme de ecuații elementare (S) și (S') se numesc sisteme echivalente

36. dacă sistemul (S') se obține din sistemul (S) printr-un număr finit de transformări elementare de tipul (I), (II) sau (III).

37. Vom desemna acest lucru prin notația $(S) \sim (S')$.

38. Observație:

39. Relația “ \sim ” este o relație de echivalență pe mulțimea sistemelor de m ecuații liniare și cu n necunoscute.

40. **Teorema 1.3:**

41. Fie (S) și (S') două sisteme de m ecuații liniare și cu n necunoscute.

42. Dacă (S) și (S') sunt sisteme echivalente,

43. atunci (S) și (S') au aceleași soluții.

44. Demonstrație:

45. Ținând cont de definiția sistemelor echivalente,

46. precum și de observația anterioară,

47. ne putem reduce la cazul în care (S') se obține din (S) printr-o singură transformare elementară de tipul (I),
 48. (II)
 49. sau (III).
 50. În acest caz este evident că orice soluție a sistemului (S) este soluție și a sistemului (S').
 51. Pe de altă parte,
 52. deoarece sistemul (S) se obține din sistemul (S') printr-o transformare elementară de tipul (I),
 53. (II) sau
 54. (III),
 55. orice soluție a sistemului (S') este soluție a sistemului (S)
 56. și astfel teorema este demonstrată. ■
 57. **Teorema 1.4**
 58. - 63.

Teorema 1.4: Orice sistem (S) cu m ecuații liniare și n necunoscute este echivalent cu un sistem (\bar{S}) de forma:

$$(\bar{S}) : \begin{cases} \bar{a}_{11}x_1 + \dots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1 \\ \bar{a}_{2k_2}x_{k_2} + \dots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2 \\ \bar{a}_{3k_3}x_{k_3} + \dots + \bar{a}_{3n}x_n = \bar{b}_3 \\ \dots \\ \bar{a}_{rk_r}x_{k_r} + \dots + \bar{a}_{rn}x_n = \bar{b}_r \\ 0 = \bar{b}_{r+1} \\ \dots \\ 0 = \bar{b}_n \end{cases}$$

unde $\bar{a}_{11}, \bar{a}_{2k_2}, \bar{a}_{3k_3}, \dots, \bar{a}_{rk_r} \neq 0$ și $1 < k_2 < k_3 < \dots < k_r$. (\bar{S}) se va numi forma triunghiulară a sistemului (S).

64. **Demonstrație:** [...]

+22 actes = 86

87. **Observație:**

88. 1. Sistemul (S) este compatibil

89. dacă și numai dacă în forma (\hat{S}) nu apar ecuații de forma $0 = \bar{b}_p$, cu \bar{b}_p nenul.

2. [...]

+ 11

100. **Exercițiul 1:**

101. Să se rezolve,

102. cu ajutorul metodei lui Gauss,

103. sistemul de ecuații liniare:

104.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1 \end{cases}$$

105. **Soluție:**

106. Vom folosi algoritmul descris în demonstrația *Teoremei 1.4* pentru a găsi forma triunghiulară a sistemul dat.

107. Cu ajutorul transformărilor elementare (I), (II) și (III) sistemul se poate scrie succesiv astfel:

108.

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1 \end{array} \right. \xrightarrow{\substack{E_2 + (-1)E_1 \\ E_3 + (-1)E_1 \\ E_4 + (-1)E_1 \\ E_5 + (-1)E_1}} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\ -3x_3 + 2x_4 + x_5 = -2 \\ -5x_2 - 4x_3 + 3x_4 - x_5 = 2 \\ -7x_2 - 4x_3 + 5x_4 - x_5 = 2 \\ -x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 = -2 \end{array} \right. \\
 & \xrightarrow{E_2 \leftrightarrow E_5} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 = -2 \\ -5x_2 - 4x_3 + 3x_4 - x_5 = 2 \\ -7x_2 - 4x_3 + 5x_4 - x_5 = 2 \\ -3x_3 + 2x_4 + x_5 = -2 \end{array} \right. \xrightarrow{\substack{E_3 + (-5)E_2 \\ E_4 + (-7)E_2}} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 = -2 \\ 8x_3 - 6x_4 - 3x_5 = 6 \\ 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 2 \\ -3x_3 + 2x_4 + x_5 = -2 \end{array} \right. \\
 & \xrightarrow{\substack{\frac{1}{2}E_3 \\ \frac{1}{8}E_4}} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 = -2 \\ 16x_3 - 12x_4 - 6x_5 = 12 \\ 24x_3 - 16x_4 - 8x_5 = 16 \\ -3x_3 + 2x_4 + x_5 = -2 \end{array} \right. \xrightarrow{\substack{E_3 + \left(-\frac{8}{3}\right)E_4 \\ E_5 + E_3}} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 = -2 \\ 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 2 \\ 8x_3 - 6x_4 - 3x_5 = 6 \\ -3x_3 + 2x_4 + x_5 = -2 \end{array} \right. \\
 & \xrightarrow{E_3 \leftrightarrow E_4} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 = -2 \\ 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 2 \\ 8x_3 - 6x_4 - 3x_5 = 6 \\ -3x_3 + 2x_4 + x_5 = -2 \end{array} \right. \xrightarrow{\substack{E_4 + \left(-\frac{8}{3}\right)E_3 \\ E_5 + E_3}} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 = -2 \\ 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 2 \\ -\frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 = \frac{2}{3} \\ 0 = 0 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

109. Putem acum să tragem următoarele concluzii:

110. sistemul dat este compatibil nedeterminat,

111. x_1, x_2, x_3, x_4 sunt necunoscute principale,

112. iar x_5 este necunoscută secundară.

113. Utilizând substituția inversă găsim:

114.

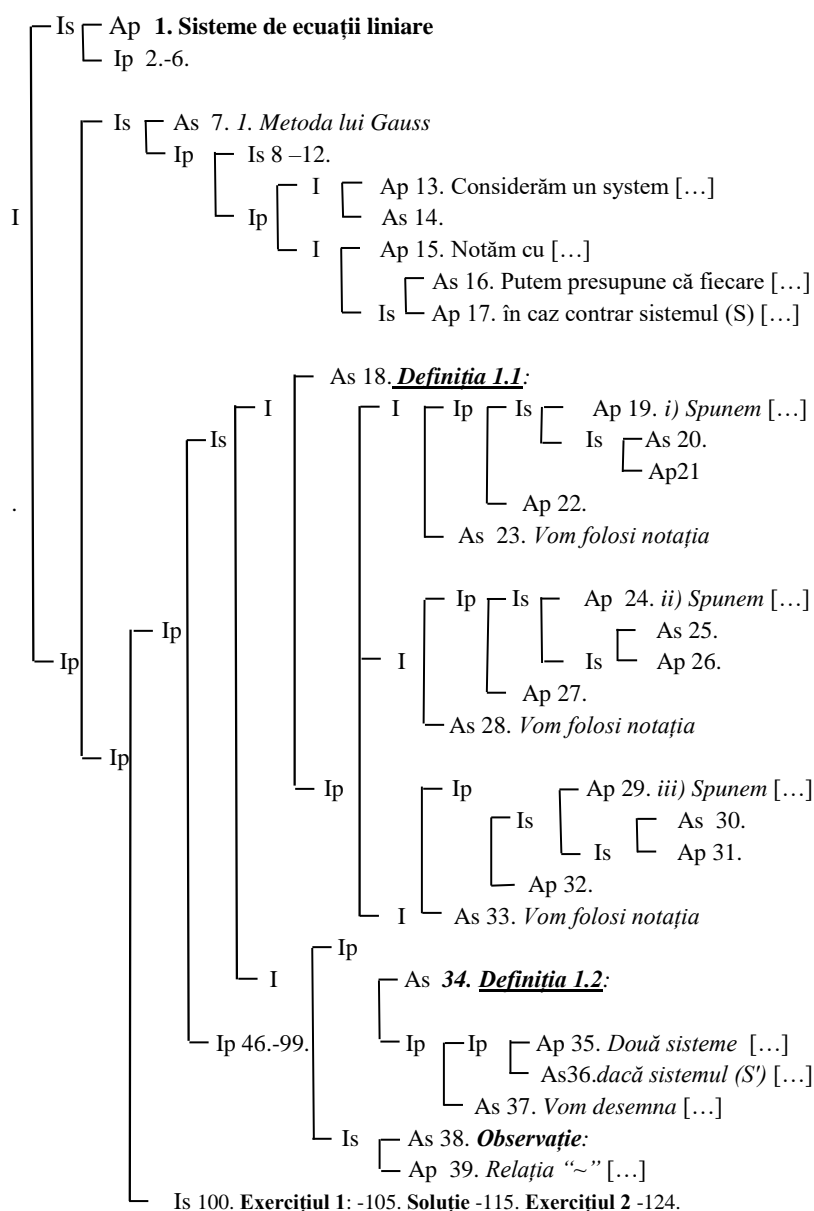
$$x_1 = -\frac{\alpha}{2}, \quad x_2 = -1 - \frac{\alpha}{2}, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = -1 - \frac{\alpha}{2}, \quad x_5 = \alpha$$

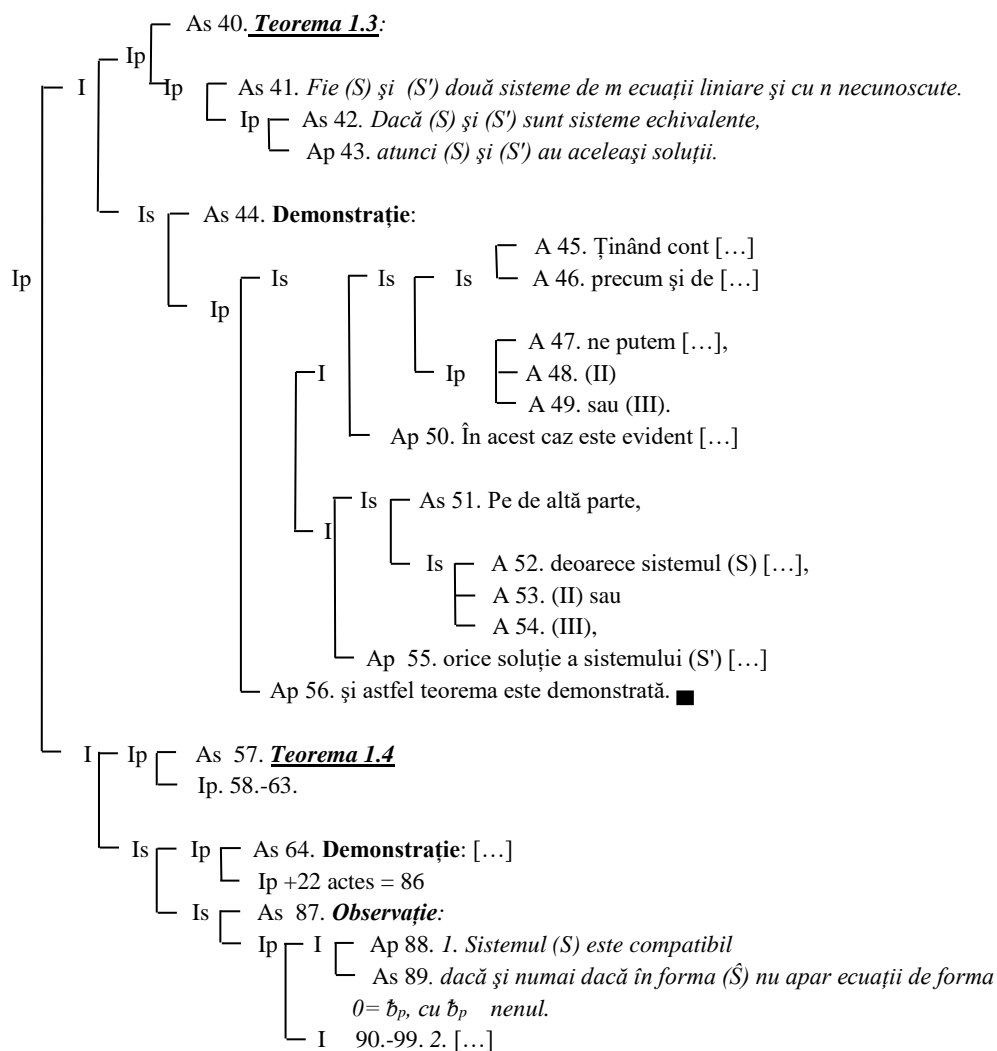
cu $\alpha \in \mathbf{R}$. \square

115. Exercițiul 2 [...]

+9 = 124

Annexe 3 Structure hiérarchique





Is 100. **Exercițiul 1:** -105. **Soluție** -115. **Exercițiul 2** -124.

Annexe 4

Informational Organisation

1. D Sisteme de ecuații liniare
2. L Metodele de rezolvare ale **sistemelor de ecuații liniare** [1: Sisteme de ecuații liniare] se împart în două categorii:
3. L (2: Metodele de rezolvare) - metode directe:
- 4..L (3: metode directe) presupun obținerea soluției exacte a sistemului după un număr finit de operații elementare;
5. D+TC (2: Metodele de rezolvare) - metode iterative:
6. L (5: metode iterative) se bazează pe folosirea unei aproximații inițiale care se îmbunătățește de la o etapă la alta.
7. D (3: metode directe) 1. Metoda lui Gauss
8. L Prezentăm în această secțiune **cea mai simplă metodă directă** [7: Metoda lui Gauss] de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare,
- 9.L (8: cea mai simplă metodă directă) numită Metoda lui Gauss sau
10. TC (8: cea mai simplă metodă directă) Metoda eliminărilor succesive.
11. L+D (9-10: Metoda lui Gauss, Metoda eliminărilor succesive) Această metodă are la bază ideea transformării sistemului dat într-un sistem superior triunghiular sau trapezoidal prin eliminarea succesivă a necunoscutelor
- 12.TC+D (9-10: Metoda lui Gauss, Metoda eliminărilor succesive) și apoi folosirea procedurii de substituție inversă pentru rezolvarea sistemului obținut.
13. D Considerăm **un sistem** [11: sistemului dat] de m ecuații și n necunoscute:
14. L (13: un sistem)

[illegible]

15. TC Notăm cu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad A^e = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

matricea coeficienților **sistemului**, [13: un sistem] respectiv matricea extinsă a **sistemului** [13: un sistem].

16. L Putem presupune că fiecare coloană a **matricea** [sic !] A [15 : A] este nenulă,

17. D în caz contrar sistemul (S) [14] putându-se înlocui cu un sistem cu număr mai mic de necunoscute.

18. L+D (7-17: Metoda lui Gauss) Definiția 1.1:

19. L+D¹⁸ (18: Definiția 1.1) i) Spunem că sistemului (S) [14, 17] i s-a aplicat o transformare elementară de tipul (I)

20. TC dacă **sistemului** [sistemului (S)] i se permută două ecuații,

21. D poziția celorlalte **m-2 ecuații** [13: m ecuații] rămânând nemodificată:

$$(S): \begin{cases} E_1 \\ \dots \\ E_i \\ \dots \\ E_j \\ \dots \\ E_m \end{cases} \xrightarrow{(I)} (S'): \begin{cases} E_1 \\ \dots \\ E_j \\ \dots \\ E_i \\ \dots \\ E_m \end{cases}$$

22. D (S) [14, 17, 19¹⁹]

23. L (22) Vom folosi notația

$$E_i \leftrightarrow E_j.$$

24.D (18: Definiția 1.1) ii) Spunem că sistemului (S) [14, 17, 19, 22] i s-a aplicat o transformare elementară de tipul (II)

25. L dacă o ecuație a **sistemului** [sistemului (S)] se înmulțește cu o constantă nenulă,

26. D celelalte m-1 [13: m ecuații] ecuații rămânând nemodificate:

27. D (S) [14, 17, 19, 22, 24]

$$(S): \begin{cases} E_1 \\ \dots \\ E_i \\ \dots \\ E_m \end{cases} \xrightarrow{(II)} (S'): \begin{cases} E_1 \\ \dots \\ \lambda E_i \\ \dots \\ E_m \end{cases}$$

28. L (27) Vom folosi notația

$$\lambda E_i.$$

¹⁸ O dublă ancorare – topic implicit pentru ancorarea metaconceptuală (definiție) și trace topicale pentru ancorarea conceptuală – frecvent la distanță, dar întotdeauna cu o trace topicale explicită care facilitează înlănțuirea informației. Idem actele 24 și 29 ș.a.

¹⁹ Trimitere la prima ocurență a conceptului principal, dar și la ocurențele sale succesive. Idem 24 și 29 ș.a.m.d.

29. D (18: Definiția 1.1) iii) Spunem că sistemului (S) [14, 17, 19, 22, 24] i s-a aplicat o transformare elementară de tipul (III)
30. L dacă unei ecuații a **sistemului** [sistemului (S)] i se adună o altă ecuație multiplicată cu o constantă nenulă,
31. D celelalte **m-1** [13: m ecuații] ecuații rămânând nemodificate:
32. D (S) [14, 17, 19, 22, 24, 27, 29]

$$(S): \begin{cases} E_1 \\ \dots \\ E_i \\ \dots \\ E_j \\ \dots \\ E_m \end{cases} \xrightarrow{(III)} (S'): \begin{cases} E_1 \\ \dots \\ E_i \\ \dots \\ E_j + \lambda E_i \\ \dots \\ E_m \end{cases}$$

33. L (32) Vom folosi notația

$$E_j + \lambda E_i.$$

34. D (7-17: Metoda lui Gauss) Definiția 1.2:
35. L+D (34: Definiția 1.2) Două sisteme de ecuații elementare (S) și (S') [21, 27, 32] se numesc sisteme echivalente
36. L (35: sisteme echivalente) dacă sistemul (S') se obține din sistemul (S) printr-un număr finit de transformări elementare de tipul (I), (II) sau (III).
37. TC Vom desemna **acest lucru** (35: sisteme echivalente) prin notația (S) ~ (S').
38. L+D (34-37: Definiția 1.2) Observație:
39. L+D (38: Observație) Relația “~” [notația (S) ~ (S')] este o relație de echivalență pe mulțimea sistemelor de m ecuații liniare și cu n necunoscute.
40. D (7-17: Metoda lui Gauss) Teorema 1.3:
41. D Fie (S) și (S') [21, 27, 32, 35] două sisteme de m ecuații liniare și cu n necunoscute.
42. L Dacă (S) și (S') [41: două sisteme de m ecuații liniare și cu n necunoscute] sunt sisteme echivalente,
43. L (42) atunci (S) și (S') au aceleași soluții.
44. L+D (40-43) Demonstrație:
45. L+D (44: Demonstrație) Ținând cont de **definiția sistemelor echivalente** [35-36],
46. D+D (44: Demonstrație) precum și de **observația anterioară** [39-43],
47. L+D (45-46) ne putem reduce la cazul în care (S') se obține din (S) printr-o singură transformare elementară de **tipul (I)** [19-23],
48. TC+D (45-46) (II) [24-28]
49. TC+D (45-46) sau (III) [29-33].
50. L **În acest caz** [47-49] este evident că orice soluție a sistemului (S) este soluție și a sistemului (S').
51. L (50) Pe de altă parte,

52. L+D (51) deoarece sistemul (S) se obține din sistemul (S') printr-o transformare elementară de **tipul (I)** [19-23],
 53. L+D **(II)** [24-28] sau
 54. L+D **(III)** [29-33],
 55. L+D (51-54) orice soluție a sistemului (S') este soluție a sistemului (S)
 56. L și **astfel** [55] teorema este demonstrată. ■
 57. D (7-17: Metoda lui Gauss) Teorema 1.4
 58. - 63.

Teorema 1.4: Orice sistem (S) cu m ecuații liniare și n necunoscute este echivalent cu un sistem (\bar{S}) de forma:

$$(\bar{S}): \begin{cases} \bar{a}_{11}x_1 + \dots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1 \\ \bar{a}_{2k_2}x_{k_2} + \dots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2 \\ \bar{a}_{3k_3}x_{k_3} + \dots + \bar{a}_{3n}x_n = \bar{b}_3 \\ \dots \\ \bar{a}_{rk_r}x_{k_r} + \dots + \bar{a}_{rn}x_n = \bar{b}_r \\ 0 = \bar{b}_{r+1} \\ \dots \\ 0 = \bar{b}_n \end{cases}$$

unde $\bar{a}_{11}, \bar{a}_{2k_2}, \bar{a}_{3k_3}, \dots, \bar{a}_{rk_r} \neq 0$ și $1 < k_2 < k_3 < \dots < k_r$. (\bar{S}) se va numi forma triunghiulară a sistemului (S).

64. Demonstrație: [...]
 +22 actes = 86
 87. Observație:
 88. 1. Sistemul (S) este compatibil
 89. dacă și numai dacă în forma (\hat{S}) nu apar ecuații de forma $0 = \hat{b}_p$, cu \hat{b}_p nenul.
 2. [...]
 + 11 actes = 99
 100. D (7-17: Metoda lui Gauss) Exercițiul 1:
 101. L (100) Să se rezolve,
 102. L (101) cu ajutorul metodei lui Gauss,
 103. L (102) sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1 \end{cases}$$

104. L (103)

105. L (100 : Exercițiul1) Soluție:

106. L+D (105) Vom folosi algoritmul descris în demonstrația **Teoremei 1.4** [57-63] pentru a găsi forma triunghiulară a sistemul dat.

107. L+D (106) Cu ajutorul transformărilor elementare **(I)** [19-23], **(II)** [24-28] și **(III)** [29-33] sistemul se poate scrie succesiv astfel:

108. L (107)

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} E_2+(-1)E_1 \\ E_3+(-1)E_1 \\ E_4+(-1)E_1 \\ E_5+(-1)E_1 \end{matrix}} \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\ -3x_3 + 2x_4 + x_5 = -2 \\ -5x_2 - 4x_3 + 3x_4 - x_5 = 2 \\ -7x_2 - 4x_3 + 5x_4 - x_5 = 2 \\ -x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 = -2 \end{cases} \\
 & \xrightarrow{E_2 \leftrightarrow E_5} \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 = -2 \\ -5x_2 - 4x_3 + 3x_4 - x_5 = 2 \\ -7x_2 - 4x_3 + 5x_4 - x_5 = 2 \\ -3x_3 + 2x_4 + x_5 = -2 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} E_3+(-5)E_2 \\ E_4+(-7)E_2 \end{matrix}} \\
 & \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 = -2 \\ 16x_3 - 12x_4 - 6x_5 = 12 \\ 24x_3 - 16x_4 - 8x_5 = 16 \\ -3x_3 + 2x_4 + x_5 = -2 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} \frac{1}{2}E_3 \\ \frac{1}{8}E_4 \end{matrix}} \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 = -2 \\ 8x_3 - 6x_4 - 3x_5 = 6 \\ 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 2 \\ -3x_3 + 2x_4 + x_5 = -2 \end{cases} \\
 & \xrightarrow{E_3 \leftrightarrow E_4} \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 = -2 \\ 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 2 \\ 8x_3 - 6x_4 - 3x_5 = 6 \\ -3x_3 + 2x_4 + x_5 = -2 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} E_4+\left(-\frac{8}{3}\right)E_3 \\ E_5+E_3 \end{matrix}} \\
 & \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 = -2 \\ 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 2 \\ -\frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 = \frac{2}{3} \\ 0 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

109. L (108) Putem acum să tragem următoarele concluzii:

110. L (109: concluzii) sistemul dat este compatibil nedeterminat,

111. TC (109: concluzii) x_1, x_2, x_3, x_4 sunt necunoscute principale,

112. TC (109: concluzii) iar x_5 este necunoscută secundară.

113. D (108) Utilizând substituția inversă găsim:

114. L (113: substituția inversă)

$$x_1 = -\frac{\alpha}{2}, \quad x_2 = -1 - \frac{\alpha}{2}, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = -1 - \frac{\alpha}{2}, \quad x_5 = \alpha$$

cu $\alpha \in \mathbf{R}$. \square

115. D (7-17: Metoda lui Gauss) Exercițiul 2 [...]

+9 = 124