Modelarea mersului trenurilor cu ajutorul unui graf expandat

Autor: lector univ dr. Ion Cozac

Rezumat

O rețea de cale ferată este modelată cu ajutorul unui graf simetric ponderat. Acest articol descrie modul de rezolvare a următoarelor probleme:

– cum se introduc datele pentru un nou mers al trenurilor;

– cum se modelează acest mers cu ajutorul unui graf expandat;

– cum se determină drumuri optime (trasee avînd timp minim de călătorie) între două stații.

Introducerea datelor

Fie un graf simetric ponderat $G = (X, U, d)$ unde:

– X este o mulțime finită şi nevidă de noduri, asociată cu mulțimea stațiilor CFR;

– U este o mulțime de arce, submulțime a produsului cartezian X x X cu proprietățile:

  – nu are elemente de tip (x,x): sînt excluse buclele;

  – dacă $(x,y) \in U$ atunci şi $(y,x) \in U$: graful este simetric;

– d este o funcție distanță, $d : U \rightarrow \mathbf{N}^*$ cu proprietatea că $d(x,y) = d(y,x)$ pentru orice $(x,y) \in U$.

Prima problemă care trebuie rezolvată este cea a introducerii cît mai comode a datelor despre un mers nou. Pentru fiecare tren se precizează: care este traseul acestuia, prin ce stații trece, ora sosirii şi plecării pentru fiecare stație.

Pentru un tren oarecare se introduc stația inițială de plecare şi stația finală de sosire. În acest moment s-ar putea determina un drum de distanță minimă între cele două stații. Dar nu întotdeauna un tren parcurge traseul de distanță minimă dintre cele două stații. Astfel că, dacă traseul trenului diferă de cel avînd distanța minimă, trebuie să precizăm un nod intermediar, sau poate chiar două. În continuare se determină un traseu de distanță minimă care să treacă prin toate nodurile în ordinea dată. În acest scop poate fi folosit algoritmul Dijkstra [1].

Avînd toate stațiile de pe parcursul unui tren, se pot preciza pentru fiecare stație ora sosirii şi ora plecării. Stația inițială de plecare nu are asociată o oră de sosire, şi stația finală de sosire nu are asociată o oră de plecare. De asemenea, este posibil ca o stație intermediară să nu aibă asociată orele de sosire şi plecare, dacă trenul nu are oprire în stația respectivă.

Grafuri de tip time-table

Există modelări ale problemei mersului trenurilor disponibile pe Internet. Prezentăm în continuare un astfel de model [2], simplificat şi completat pentru a modela cît mai bine unele particularităţi ale reţelei CFR.

Să presupunem că avem trei staţii: Sa, Sb şi Sc, şi trei trenuri cu următorul orar de circulaţie:

– T1: (Sa, 8:00) – (Sb, 8:15, 8:20) – (Sc, 8:30);

– T2: (Sb, 12:00) – (Sc, 12:45, 12:50) – (Sa, 13:10);

– T3: (Sc, 14:00) – (Sa, 14:15, 14:20) – (Sb, 14:35).

Pentru fiecare staţie, şi pentru fiecare moment de sosire şi plecare se defineşte cîte un nod în graful expandat. Astfel vom avea următoarele noduri:

– N1(A, T1, 8:00), N2(A, T2, 13:10), N3(A, T3, 14:15), N4(A, T3, 14:20);

– N5(B, T1, 8:15), N6(B, T1, 8:20), N7(B, T2, 12:00), N8(B, T3, 14:35);

– N9(C, T1, 8:30), N10(C, T2, 12:45), N11(C, T2, 12:50), N12(C, T3, 14:00).

Se definesc arce în graful expandat astfel:

– arce care indică momente succesive din ruta unui tren:

(N1,N5), (N5,N6), (N6,N9)	(T1)
(N7,N10), (N10,N11), (N11, N2)	(T2)
(N12,N3), (N3,N4), (N4, N8)	(T3)

– arce care indică posibilitatea schimbării unui tren într-o staţie:

(N2,N1), (N2,N4), (N3,N1)	(Sa)
(N5,N7), (N8,N6), (N8,N7)	(Sb)
(N9,N11), (N9,N12), (N10,N12)	(Sc)

Fiecare arc din a doua listă uneşte două vîrfuri care se referă la aceeaşi staţie şi trenuri diferite, vîrful iniţial fiind vîrf de sosire, vîrful final fiind vîrf de plecare. Aceasta este diferenţa faţă de modelul folosit în lucrarea amintită ca bibliografie [2], unde arcele din a doua listă formează un circuit elementar, vîrfurile fiind luate în ordinea crescătoare a momentelor de timp, la care se adaugă cîte un arc suplimentar: ultimul vîrf este conectat cu primul pentru a indica curgerea nopţii.

Uneori este necesar să introducem legături suplimentare în graful expandat, pentru a indica faptul că un tren de legătură trebuie luat dintr-o staţie vecină.

Exemple: (Ploiesti Vest, Ploiesti Sud), (Bucuresti Nord Gr A, Bucuresti Nord Gr B).

În aceste situaţii legăturile trebuie să ţină seama de timpul necesar pentru a ajunge dintr-o staţie în cealaltă cu un alt mijloc de transport (de exemplu autobuz). Aceste arce suplimentare vor fi definite astfel:

– nodul inițial al arcului este asociat unui moment de sosire, şi nodul final unui moment de plecare;

– se vor avea în vedere acele noduri care corespund unui interval minim de timp, dar nu mai mic decît cel necesar pentru a parcurge distanța dintre cele două stații.

Graful expandat $G' = (X', U')$ asociat mersului trenurilor este un graf orientat unde:

– X' este mulțimea de noduri definite cum s-a arătat mai sus; un nod $x' \in X'$ este un triplet (a,b,h) cu semnificația: a - stație, b – tren, h – ora plecării sau sosirii;

– U' este mulțimea de arce definite cum s-a arătat mai sus.

Determinarea traseelor optime între două stații

Fiind date două stații s şi t, trebuie să se determine cît mai multe trasee optime (ca şi timp de călătorie) de la s la t. Trebuie să precizăm mai exact ce înseamnă traseu optim. Considerînd stația s şi ora de plecare h, să se determine un traseu care ne permite să ajungem în cel mai scurt timp în stația t. Dacă vom considera diferite ore de plecare, este posibil să avem trasee diferite cu durate diferite de călătorie, toate fiind optime conform precizării de mai sus.

Criteriul de optim este relativ la momentul plecării. Dar dacă se identifică două trasee diferite, cu momente diferite de plecare, dar momentul sosirii coincide, va fi luat în considerare doar acel traseu care are timpul total de călătorie minim.

Pentru a determina traseul optim se utilizează algoritmul Dijkstra conform [1], cu cîteva modificări.

Se determină o mulțime $S' \subset X'$ asociată stației s care se referă doar la momente de plecare. Se determină de asemenea o mulțime $T' \subset X'$ asociată stației t care se referă doar la momente de sosire.

Pentru fiecare nod $s' \in S'$ se determină un traseu optim de la s' la primul nod t' care este depistat în T'. Pentru două noduri consecutive $n_1(a_1,b_1,h_1)$ şi $n_2(a_2,b_2,h_2)$ timpul se determină astfel:

$(1440+h_2-h_1) \bmod 1440$, dacă momentele de timp sînt date în minute în intervalul $[0,1439]$.

Selectarea numelor de stații

Există unele localități cu mai multe stații avînd denumiri asemănătoare, exemplificate mai jos. În majoritatea cazurilor există o singură gară principală (cea evidențiată), în alte cazuri există mai multe gări principale. În plus se observă că nu întotdeauna începutul numelor stațiilor coincid.

O soluție simplă pentru această problemă asociază mai multe informații pentru fiecare stație:

– numele stației;

– codul stației;
– codul stației de referință;
– indicator (stație principală sau secundară).

Exemple:

– (**Dej Calatori**, 1, 1, p); (Dej, 2, 1, s);
– (**Tirgu Mures**, 3, 3, p); (Tirgu Mures Nord, 4, 3, s);
– (**Baile Tusnad**, 5, 5, p); (Tusnad Sat, 6, 5, s);
– (**Ploiesti Vest**, 7, 8, p); (**Ploiesti Sud**, 8, 8, p);
– (**Cluj Napoca**, 9, 9, p); (Cluj Napoca Est, 10, 9, s);
– (**Bucuresti Nord Gr A**, 11, 11, p); (**Bucuresti Nord Gr B**, 12, 11, p).

Avînd aceste informații despre fiecare stație, în situații ambigue se poate selecta pentru plecare sau sosire mulțimea stațiilor principale care au acelaşi cod de referință, dacă nu se solicită în mod expres alegerea unei stații secundare. Se pot încerca toate rutele pe care le furnizează algoritmul, după care se aplică un criteriu suplimentar de optimalitate dacă este nevoie. Dacă pentru destinație există mai multe stații selectate cu algoritmul descris mai sus, un traseu se va opri la prima stație din listă care este întîlnită.

Abstract

A railway net is modeled using a symmetric, weighted graph. This paper describes a solution for the following problems:
– how to introduce the information corresponding to a new time-table;
– how to model the time-table using an expanded graph;
– how to determine optimum paths between two given stations, the optimum criterion being considered with respect to the travel time.

Bibliografie

[1] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald R. Rivest – *Introducere în algoritmi*, Editura Libris, 2000
[2] Frank Schulz, Dorothea Wagner, Christos Zaroglias – *Using multilevel graph for time-table information on railway systems* / Editors: D. Mount and C. Steiri, ALENEX 2000, LNCS 2409, pp 43-59