DRUMURI OPTIME ÎN GRAFURI ORAR

ION COZAC

Abstract

We studied the optimum route problem in time-table graphs, in order to develop a web server supporting on-line queries. This paper describes how to solve the following problems:
– separate train time-tables are given; how to build the entire time-table graph?
– how to use the maximum allowed distance as restriction criterion in the search process?
– how to split the time-table graph into two distinct graphs, to improve the efficiency?
Our study is based on the model designed by Schulz, Wagner and Zaroliagis.

Keywords: *time-table graph, near optimum path, earliest arrival, maximum allowed distance*

1. Datele inițiale ale problemei

O rețea feroviară este modelată cu ajutorul unui graf simetric ponderat

$G = (X, U, d)$:

– X este o mulțime finită şi nevidă de noduri, asociată cu mulțimea stațiilor rețelei;

– U este o mulțime de arce care indică legături directe între stații: dacă $(x,y) \in U$ atunci între x şi y nu există alte stații;

– d este o funcție distanță simetrică, $d : U \to \mathrm{N}^*$; $d(x,y) = d(y,x)$ pentru orice $(x,y) \in U$.

Prima problemă care trebuie rezolvată este cea a introducerii cît mai comode a datelor despre un orar nou. Pentru fiecare tren se precizează: care este traseul acestuia, prin ce stații trece, ora sosirii şi plecării pentru fiecare stație.

Pentru un tren oarecare se introduc stația inițială de plecare şi stația finală de sosire. În acest moment s-ar putea determina un drum de distanță minimă între cele două stații. Dar nu orice tren parcurge traseul de distanță minimă dintre cele două stații. Astfel că, dacă traseul trenului diferă de cel avînd distanța minimă, trebuie să precizăm un nod intermediar, sau poate chiar două. În continuare se determină un traseu de distanță minimă care să treacă prin toate nodurile în ordinea dată; în acest scop poate fi folosit algoritmul Dijkstra [1].

Avînd toate stațiile de pe parcursul unui tren, se pot preciza pentru fiecare stație ora sosirii şi ora plecării. Stația inițială de plecare nu are asociată o oră de sosire, şi stația finală de sosire nu are asociată o oră de plecare. De asemenea, este posibil ca o stație intermediară să nu aibă asociate aceste informații, dacă trenul nu are oprire în stația respectivă.

2. Modelare cu ajutorul unui graf expandat

Există modelări ale problemei mersului trenurilor disponibile pe Internet. Prezentăm în continuare un astfel de model (cf Schulz et al [4]), simplificat şi completat pentru a modela cît mai bine unele particularităţi ale reţelei feroviare din România. Să presupunem că avem trei staţii: *Sa*, *Sb* şi *Sc*, şi trei trenuri cu următorul program de circulaţie:

– T1: (*Sa*, 8:00) – (*Sb*, 8:15, 8:20) – (*Sc*, 8:30);

– T2: (*Sb*, 12:00) – (*Sc*, 12:45, 12:50) – (*Sa*, 13:10);

– T3: (*Sc*, 14:00) – (*Sa*, 14:15, 14:20) – (*Sb*, 14:35).

Pentru fiecare staţie, şi pentru fiecare moment de sosire şi plecare, se defineşte cîte un nod în graful expandat. Astfel vom avea următoarele noduri:

– cele asociate staţiei *Sa*: n_1(T1,8:00), n_2(T2,13:10), n_3(T3,14:15), n_4(T3,14:20);

– cele asociate staţiei *Sb*: n_5(T1,8:15), n_6(T1,8:20), n_7(T2,12:00), n8(T3,14:35);

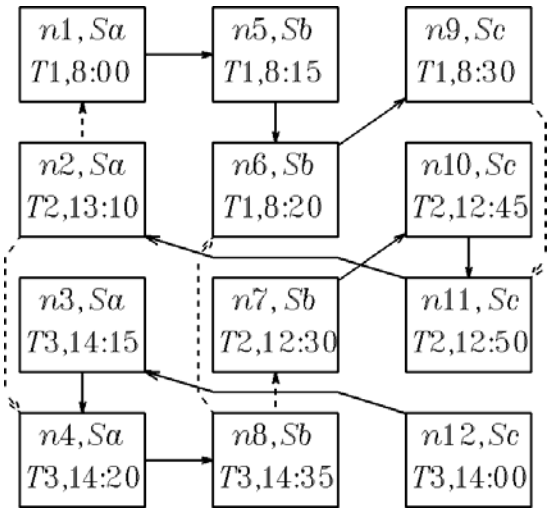
– cele asociate staţiei *Sc*: n_9(T1,8:30), n_{10}(T2,12:45), n_{11}(T2,12:50), n_{12}(T3,14:00).

Se definesc arce în graful expandat astfel:

– arce care indică momente succesive din ruta unui tren: (n_1,n_5), (n_5,n_6), (n_6,n_9), (n_7,n_{10}), (n_{10},n_{11}), (n_{11},n_2), (n_{12},n_3), (n_3,n_4), (n_4,n_8);

– arce care indică legături cu alte trenuri: (n_8,n_7), (n_8,n_6), (n_5,n_7), (n_2,n_1), (n_2,n_4), (n_3,n_1), (n_9,n_{11}), (n_9,n_{12}), (n_{10},n_{12}).

În a doua listă se includ arcele care se referă la aceeaşi staţie şi unesc un vîrf de sosire corespunzînd unui tren cu un vîrf de plecare corespunzînd altui tren.



Un exemplu de graf orar

Uneori este necesar să introducem legături suplimentare în graful expandat, pentru a indica faptul că un tren de legătură trebuie luat dintr-o staţie vecină. Exemple: (*Ploiesti*

Vest, *Ploiesti Sud*), (*Bucuresti Nord*, *Bucuresti Basarab*). În aceste situaţii legăturile trebuie să ţină seama de timpul necesar pentru a ajunge dintr-o staţie în cealaltă cu un alt mijloc de transport (de exemplu autobuz). Aceste arce suplimentare vor fi definite astfel:

– nodul iniţial al arcului este asociat unui moment de sosire, şi nodul final unui moment de plecare;

– se vor avea în vedere acele noduri care corespund unui interval de timp mai mare decît cel necesar pentru a parcurge distanţa dintre cele două staţii.

Graful expandat $G' = (X', U', time, dist)$ asociat mersului trenurilor este un graf orientat unde:

– X' este mulţimea de noduri definite cum s-a arătat mai sus; un nod $x' \in X'$ este un triplet (s,t,h) cu semnificaţia: s – staţie, t – tren, h – ora plecării sau sosirii;

– U' este mulţimea de arce definite cum s-a arătat mai sus;

– $time : E' \rightarrow \mathbf{N}$; $time\ (x',y') = (t(y') - t(x') + 1440) \bmod 1440$

– $dist : E' \rightarrow \mathbf{N}$; $dist\ (x',y')$ = distanţa minimă de la $s(x')$ la $s(y')$

$t(x')$ este componenta t a nodului x', $s(x')$ este componenta s a nodului x'.

Distanţa minimă este determinată în graful G al reţelei feroviare. Valorile funcţiilor *time* şi *dist* se calculează o singură dată, în faza de preprocesare.

Fiind date două staţii *pl* şi *so*, trebuie să se determine mai multe trasee optime (ca şi timp de călătorie) de la *pl* la *so*. Trebuie să precizăm mai exact ce înseamnă traseu optim. Considerînd staţia *pl* şi momentul de plecare *h*, să se determine un traseu care ne permite să ajungem în cel mai scurt timp în staţia *so*. Dacă vom considera diferite ore de plecare, este posibil să avem trasee diferite cu durate diferite de călătorie, toate fiind optime conform precizării de mai sus. În literatura de specialitate se foloseşte termenul *the earliest arrival problem* (Pyrga et al [4]).

Criteriul de optim este relativ la momentul plecării. Dar dacă se identifică două trasee diferite, cu momente diferite de plecare, şi momentul sosirii coincide, va fi luat în considerare doar acel traseu care are timpul total de călătorie minim.

Pentru a determina traseul optim se utilizează algoritmul Dijkstra cu cîteva modificări.

Se determină o mulţime $S' \subset X'$ asociată staţiei *pl* care se referă doar la momente de plecare. Se determină de asemenea o mulţime $T' \subset X'$ asociată staţiei *so* care se referă doar la momente de sosire. Pentru fiecare nod $s' \in S'$ se determină un traseu optim de la s' la primul nod t' care este depistat în T'. Pentru două noduri consecutive $n_1(s_1,t_1,h_1)$ şi $n_2(s_2,t_2,h_2)$ timpul se determină astfel:

$$(1440+h_2-h_1) \bmod 1440$$

dacă momentele de timp sînt date în minute în intervalul [0,1439].

Autorii citaţi mai sus propun ca în a doua listă de arce să se includă acele arce care se referă la aceeaşi staţie, şi care unesc două momente consecutive de timp, indiferent de tipul acestora (plecare sau sosire), la care se adaugă un arc care uneşte ultimul moment de timp cu primul, pentru a da posibilitatea de a obţine legături la momentul trecerii de la o zi la alta.

Avantajul acestei abordări este obţinerea unui număr redus de arce în graful orar. Dezavantajul apare la gestionarea dificilă a situaţiilor în care e nevoie să se schimbe un tren, dacă se urmăreşte în acelaşi timp şi un număr minim de schimbări.

Deoarece modelul nostru cere să se construiască legături între orice vîrf de sosire şi orice vîrf de plecare, numărul total numărul total de arce este de cîteva ori mai mare. În schimb se gestionează mult mai uşor situaţiile în care e nevoie să se schimbe un tren.

Verificări suplimentare permit reducea numărului de arce, selectînd doar staţiile unde astfel de schimbări sînt într-adevăr necesare. De exemplu, arcul (n_5,n_7) nu e necesar deoarece se poate ajunge la staţia *Sc* cu trenul T1 – direct, pe cînd folosirea acestui arc ar presupune schimbarea trenului. Un alt exemplu: avem un tren pe ruta $Sa \rightarrow Sb \rightarrow Sc$, dacă am avea un tren pe ruta $Sc \rightarrow Sb \rightarrow Sa$, nu s-ar justifica o schimbare între cele două trenuri în staţia *Sb*.

Este necesară o selecţie foarte atentă a arcelor care vor defini graful orar. De rezultatul acestei selecţii va depinde într-o măsură foarte mare atît calitatea informaţiilor furnizate de programul de căutare, cît şi eficienţa acestuia. Aşadar, etapa de preprocesare a datelor este foarte importantă în astfel de situaţii.

3. Algoritm de căutare accelerată

Deoarece graful orar are un număr foarte mare de vîrfuri şi arce, unii autori recomandă (Schulz et al [3]) construirea unor grafuri pe mai multe nivele, căutarea făcîndu-se mai întîi în graful cel mai mic, după aceea în graful de pe nivelul următor şi aşa mai departe. În graful de pe un nivel mai mare se face căutare restrictivă, doar pentru vîrfurile aflate în vecinătatea celor identificate la nivelul anterior.

Propunem în continuare un criteriu mai simplu de restricţionare a căutărilor, care nu necesită memorie suplimentară. Inițial se determină distanța minimă de la stația finală la fiecare din celelalte stații, şi se reţin doar stațiile care se află la o distanță care este cu cel mult 50% (de exemplu) față de distanța minimă. Această selecţie se face foarte repede, deoarece graful reţelei feroviare este de zeci de ori mai mic față de graful orar.

În continuare, pentru fiecare vîrf extras (algoritmul Dijkstra modificat) căutarea continuă numai dacă distanța deja parcursă plus distanța minimă (rămasă de parcurs, determinată anterior) nu depăşeşte limita stabilită.

Fie *pl* stația de plecare şi *so* stația de sosire. Trebuie să determinăm mai multe rute optime posibile de la *pl* la *so*, criteriul de optim fiind timpul total de călătorie. Pentru a rezolva această problemă folosim o variantă a algoritmului Dijkstra. Selectăm o submulțime $S' \subset X'$ asociată stației *pl* şi orice nod este de plecare. Selectăm de asemenea o submulțime $A' \subset V'$ asociată stației *so* şi orice nod este de sosire. Pentru fiecare nod $s' \in S'$ determinăm o rută optimă de la *s'* la primul nod *x'* întîlnit în A'.

Deoarece graful orar este destul de mare sînt necesare tehnici de accelerare a căutării. Propunem în continuare un criteriu care restrînge căutările fără a fi nevoie de memorie suplimentară. Mai întîi determinăm distanța minimă de la *pl* la *so*, pe care o înmulțim cu un factor $f > 1$; obținem astfel *md*, distanța maximă admisă. De exemplu, dacă acceptăm o rută care acoperă o distanță cu 50% mai mare decît distanța minimă, atunci $f = 1{,}50$.

Algoritm MarkStations (variantă Dijkstra);

Input. $G = (X, U, d)$ graful reţelei feroviare;

pl, staţia de plecare; so, staţia de sosire;

f, factor de deviere maximă ($f > 1$).

Output. D, lista distanţelor de la so la toate celelalte staţii;

md, distanţa maximă admisă.

begin

for (each $x \in X$) do $D[x] := \infty$;

$D[so] := 0$; $md := 0$; $Z := \{so\}$;

while ($Z \neq \varnothing$) do begin

x := ExtractMin(Z); // x are $D[x]$ distanţa minimă dintre toate nodurile din Z

if ($x = pl$) then $md := D[x] * f$;

if ($md > 0$) and ($D[x] > md$) then break;

for (each $y \in$ Succ(x)) do begin // pentru fiecare y, succesor al lui x

if ($y \notin Z$) then $Z := Z \cup \{y\}$;

$w := D[x] + d(x,y)$;

if ($D[y] > w$) then $D[y] := w$;

end;

end;

end (algoritm).

Acum sîntem pregătiţi să determinăm o rută de la un nod oarecare din S' la primul nod întîlnit din A'.

Algoritm NearOptimumRoute (variantă Dijkstra);

Input. $G' = (X', U', time, dist)$ graful orar;

s', nod de plecare; A', set de sosire;

D, lista distanţelor, determinată anterior;

md, distanţa maximă admisă, determinată anterior.

Output. R, ruta găsită (lista nodurilor).

begin

```
for (each x' ∈ X') do begin
   P[x'] := ∞;   F[x'] := ∞;   T[x'] := ∞;
   end;
F[s'] := 0;   T[s'] := t(s');   Z := {s'};   P[s'] := s';
while (Z ≠ ∅) do begin
   x' := ExtractMin(Z);        // x' are costul minim dintre toate nodurile din Z
   if (x' ∈ A') then break;
   for (each y' ∈ Succ(x')) do begin        // pentru fiecare y', succesor al lui x'
      if (y' ∉ Z) then Z := Z ∪ {y'};
      wd := F[x'] + dist(x',y');
      if (D[s(y')]+wd > md) then continue;        // ignorăm rute foarte lungi prin y'
      wt := T[x'] + time(x',y');
      if (T(x',y'),F(x',y')) > (wt,wd) then begin        // comparare lexicografică
         T[y'] := wt;   F[y'] := wd;   P[y'] := x';
         end;
      end;
   end;
k := 0;   R[0] := x';        // x' este nodul final
while (x' ≠ d') do begin
   x' := P[x'];   k := k + 1;   R[k] := x';
   end;        // Lista R va fi parcursă  ulterior în ordine inversă
end (algoritm).
```

Algoritmul este numit *NearOptimumRoute* deoarece e posibil ca unele rute să nu fie neapărat optime (din punctul de vedere al timpului de călătorie), deoarece unele rute prea lungi (care dau o distanţă mai mare decît *md*) sînt abandonate, chiar dacă ar putea da timpi de călătorie mai buni. Pare curios, dar România este ţara tuturor posibilităţilor: există rute pe distanţe scurte unde circulă puţine trenuri, şi alte rute pe distanţe mai lungi dar mai circulate.

P se foloseşte pentru memora informaţii care vor fi folosite pentru a reconstitui o rută de la *d'* la nodul final. O rută de la *d'* la *y'* foloseşte *x'* ca nod precedent, deci *P*[*y'*] = *x'*.

T se foloseşte pentru a memora, pentru fiecare nod *y'*, timpul scurs de la *s*(*d'*) la *s*(*y'*).

F se foloseşte pentru a memora, pentru fiecare nod *y'*, distanţa parcursă de la *s*(*d'*) la *s*(*y'*). Această listă se foloseşte pentru a verifica dacă distanţa estimată de la *pl* la *so* depăşeşte sau nu distanţa maximă admisă:

D[*s*(*y'*)] este distanţa minimă de la *s*(*y'*) la *so*;

wd este distanţa parcursă de la *pl* la *s*(*y'*); *wd* ≥ distanţa minimă de la *pl* la *s*(*y'*).

Criteriul de optim este dat de cuplul (*T*, *F*) astfel: în primul rînd contează timpul de călătorie minim, iar în caz de egalitate distanţa minimă.

4. Implementare

Algoritmii descrişi mai sus au fost incluşi într-o aplicaţie web care poate fi găsită la adresa http://193.226.19.29:1026; pentru implementarea algoritmilor de drum optim am folosit cozi de prioritate (Johnson [2]).

Aplicaţia este scrisă în limbajul C şi compilată cu GNU C version 4.1.0 . Sistemul de calcul are următoarele caracteristici: procesor Intel Celeron la 768 MHz, 128 Mb RAM memorie, şi rulează un sistem de operare Linux Fedora.

Graful reţelei CFR are 1964 staţii şi 4020 arce. Graful orar are 47840 noduri şi 224810 arce (1-Jan-2007, www.infofer.ro).

Pentru a evalua performanţa serverului web am cerut să se determine rutele indicate mai jos. Tabelul de mai jos indică: staţia de plecare, staţia de sosire, distanţa minimă, numărul nodurilor de plecare (numărul de trenuri care pleacă din staţia de plecare), timpul total de răspuns, timpul mediu de răspuns.

În general, timpul total de răspuns depinde de numărul nodurilor de plecare, de distanţa parcursă de la plecare la sosire, şi de cît de repede poate serverul să găsească o direcţie corectă spre staţia de sosire. Tocmai de aceea am introdus ca şi criteriu de restricţie distanţa maximă admisă: rutele prea lungi sînt abandonate.

Rute	Timp de răspuns
Bucuresti Nord → Tirgu Mures 448 *km*, 105 *noduri de plecare*	0,479 *secunde* (*timp total*) 0,004562 *secunde (medie)*
Tirgu Mures → Bucuresti Nord 448 *km*, 24 *noduri de plecare*	0,120 *secunde* (*timp total*) 0,005 *secunde (medie)*
Bucuresti Nord → Timisoara Nord 531 *km*, 105 *noduri de plecare*	0,520 *secunde* (*timp total*) 0,004952 *secunde (medie)*
Timisoara Nord → Bucuresti Nord 531 *km*, 76 *noduri de plecare*	0,328 *secunde* (*timp total*) 0,004316 *secunde (medie)*
Tirgu Mures → Dej Calatori 150 *km*, 24 *noduri de plecare*	0,098 *secunde* (*timp total*) 0,004083 *secunde (medie)*
Dej Calatori → Tirgu Mures 150 *km*, 54 *noduri de plecare*	0,191 *secunde* (*timp total*) 0,003537 *secunde (medie)*
Dej Calatori → Cluj Napoca 59 *km*, 54 *noduri de plecare*	0,186 *secunde* (*timp total*) 0,003444 *secunde (medie)*
Cluj Napoca → Dej Calatori 59 *km*, 62 *noduri de plecare*	0,220 *secunde* (*timp total*) 0,003548 *secunde (medie)*

BIBLIOGRAFIE:

[1] E. Dijkstra – *A note on two problems in connection with networks* / Numerische Mathematik 1, 1959, pp 169-271

[2] D. B. Johnson – *A note on Dijkstra's shortest path algorithm* / Journal of ACM 20, 1973, pp 385-388

[3] Evangelia Pyrga, Frank Schulz, Dorothea Wagner, Christos Zaroliagis – *Toward realistic modeling of time-table information through the time-dependent approach* / Electronic Notes on Theoretical Computer Science 92 no 1, 2003

[4] Frank Schulz, Dorothea Wagner, Christos Zaroliagis – *Using multilevel graph for time-table information on railway systems* / Editors: D. Mount and C. Steiri, ALENEX 2002, LNCS 2409, pp 43-59.